5. Musafirov E. V. *Perturbations of the Lanford system which do not change the reflecting function* // International journal of bifurcation and chaos. 2017. Vol. 27. № 10. 1750154.

6. Musafirov E., Grin A., Pranevich A. *Admissible perturbations of a generalized Langford system* // International Journal of Bifurcation and Chaos. 2022. Vol. 32. № 03. 2250038.

7. Мусафиров Э. В. *Допустимые возмущения обобщенной системы Носе – Гувера в одном случае* // Ползуновский альманах. 2020. № 1. С. 221–222.

8. Musafirov E. *Admissible perturbations of the three–dimensional Hindmarsh – Rose neuron model* // Journal of Applied Analysis & Computation. doi: 10.11948/20210098 (в печати).

СУЩЕСТВОВАНИЕ И ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОБОБЩЁННОЙ СИСТЕМЫ МАТРИЧНЫХ УРАВНЕНИЙ РИККАТИ

Д.В. Роголев

Изучается краевая задача, аналогичная [1],

$$\frac{dX}{dt} = G_1(t, X, Y), \tag{1}$$

$$\frac{dY}{dt} = G_2(t, X, Y), \tag{2}$$

$$X(0) = X(\omega), \quad Y(0) = Y(\omega), \tag{3}$$

где

$$G_1(t, X, Y) = A_1(t)X + XB_1(t) + XS_1(t)X + XS_2(t)Y + YS_3(t)X + YS_4(t)Y + F_1(t),$$

$$G_2(t, X, Y) = A_2(t)Y + YB_2(t) + YP_1(t)X + YP_2(t)Y + XP_3(t)Y + XP_4(t)X + F_2(t),$$

с коэффициентами из $\mathbb{C}\left(I, \mathbb{R}^{n\times n}\right),\ (t, X, Y) \in I \times \mathbb{R}^{n\times n} \times \mathbb{R}^{n\times n};\ I = [0, \omega],\ \omega > 0\,.$

В теории и приложениях дифференциальных уравнений важную роль играют матричные дифференциальные уравнения Ляпунова, Риккати и их обобщения [2–6]. Краевая задача типа (1)–(3), по-видимому, впервые поставлена в [5].

Обозначения:

$$D = \{(t, X, Y)\colon t \in I,\ \|X\| \leqslant \rho_1,\ \|Y\| \leqslant \rho_2\}, \qquad \tilde{A}_i(\omega) = \textstyle\int_0^\omega A_i(\tau)d\tau, \quad \gamma_i = \left\|\tilde{A}_i^{-1}(\omega)\right\|,$$

$$\alpha_i = \max_{t\in I}\|A_i(t)\|\,, \quad \beta_i = \max_{t\in I}\|B_i(t)\|\,, \quad \delta_j = \max_{t\in I}\|S_j(t)\|\,, \quad \mu_j = \max_{t\in I}\|P_j(t)\|\,,$$

$$h_i = \max_{t\in I}\|F_i(t)\|\,, \quad i = 1, 2, \quad j = \overline{1, 4}, \quad q_{11} = \gamma_1\left\{\frac{1}{2}\alpha_1\omega^2\left[\alpha_1 + \beta_1 + 2\delta_1\rho_1 + (\delta_2 + \delta_3)\,\rho_2\right] + \right.$$

$$\left. + \,\omega\left[\beta_1 + 2\delta_1\rho_1 + (\delta_2 + \delta_3)\,\rho_2\right]\right\}, \qquad q_{12} = \gamma_1\left[(\delta_2 + \delta_3)\,\rho_1 + 2\delta_4\rho_2\right]\omega\left(\frac{1}{2}\alpha_1\omega + 1\right),$$

$$q_{21} = \gamma_2\left[(\mu_1 + \mu_3)\,\rho_2 + 2\mu_4\rho_1\right]\omega\left(\frac{1}{2}\alpha_2\omega + 1\right),$$

$$q_{22} = \gamma_2\left\{\frac{1}{2}\alpha_2\omega^2\left[\alpha_2 + \beta_2 + (\mu_1 + \mu_3)\,\rho_1 + 2\mu_2\rho_2\right] \quad + \omega\left[\beta_2 + (\mu_1 + \mu_3)\,\rho_1 + 2\mu_2\rho_2\right]\right\},$$

где $\rho_1, \rho_2 > 0$.

На основе применения метода [6, гл. 3] задача (1)–(3) рассматривается в банаховой алгебре непрерывных матриц-функций с нормой $\|T\|_C = \max\limits_{t\in I}\|T(t)\|$, где $\|\cdot\|$ – определённая норма матриц в этой алгебре, $T \in \mathbb{C}\left(I, \mathbb{R}^{n\times n}\right)$. Предлагаемая работа является продолжением и обобщением [1, 7–9].

Теорема. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) $\det \tilde{A}_i \neq 0$ $(i = 1, 2)$,

2) $$\gamma_1 \left\{ \frac{1}{2}\alpha_1\omega^2 \left[(\alpha_1 + \beta_1)\rho_1 + \delta_1\rho_1^2 + (\delta_2 + \delta_3)\rho_1\rho_2 + \delta_4\rho_2^2 + h_1 \right] + \right.$$
$$\left. + \omega\left(\beta_1\rho_1 + \delta_1\rho_1^2 + (\delta_2 + \delta_3)\rho_1\rho_2 + \delta_4\rho_2^2 + h_1\right) \right\} \leqslant \rho_1,$$
$$\gamma_2 \left\{ \frac{1}{2}\alpha_2\omega^2 \left[(\alpha_2 + \beta_2)\rho_2 + \mu_2\rho_2^2 + (\mu_1 + \mu_3)\rho_1\rho_2 + \mu_4\rho_1^2 + h_2 \right] + \right.$$
$$\left. + \omega\left(\beta_2\rho_2 + \mu_2\rho_2^2 + (\mu_1 + \mu_3)\rho_1\rho_2 + \mu_4\rho_1^2 + h_2\right) \right\} \leqslant \rho_2,$$

3) $q_{11} < 1$, $\det(E - A) > 0$, *где* $E = diag(1, 1)$, $A = (q_{ij})$.

Тогда задача (1)–(3) однозначно разрешима в области D.

Решение данной задачи строится по алгоритму в дифференциальной форме

$$\frac{dX_{k+1}}{dt} = G_1(t, X_k, Y_k), \tag{4}$$

$$\frac{dY_{k+1}}{dt} = G_2(t, X_k, Y_k), \tag{5}$$

$$X_{k+1}(0) = X_{k+1}(\omega), \quad Y_{k+1}(0) = Y_{k+1}(\omega), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{6}$$

где в качестве начального приближения X_0, Y_0 приняты постоянные матрицы, определяемые на основе (4), (5) при $k = 0$ из соответствующих условий (6) для приближения $X_1(t), Y_1(t)$,

$$\int\limits_0^\omega G_1(\tau, X_0, Y_0)d\tau = 0, \qquad \int\limits_0^\omega G_2(\tau, X_0, Y_0)d\tau = 0.$$

На основе (4)–(6) получены рекуррентные интегральные соотношения

$$X_k(t) = \tilde{A}_1^{-1}(\omega)\left\{ \int\limits_0^t \left(\int\limits_0^\tau A_1(\sigma)d\sigma \right) G_1\left(\tau, X_{k-1}(\tau), Y_{k-1}(\tau)\right)d\tau - \right.$$
$$- \int\limits_t^\omega \left(\int\limits_\tau^\omega A_1(\sigma)d\sigma \right) G_1\left(\tau, X_{k-1}(\tau), Y_{k-1}(\tau)\right)d\tau -$$
$$\left. - \int\limits_0^\omega \left[G_1\left(\tau, X_k(\tau), Y_k(\tau)\right) - A_1(\tau)X_k(\tau) \right] d\tau \right\}, \tag{7}$$

$$Y_k(t) = \tilde{A}_2^{-1}(\omega)\left\{ \int\limits_0^t \left(\int\limits_0^\tau A_2(\sigma)d\sigma \right) G_2\left(\tau, X_{k-1}(\tau), Y_{k-1}(\tau)\right)d\tau - \right.$$

$$- \int\limits_t^\omega \left(\int\limits_\tau^\omega A_2(\sigma) d\sigma \right) G_2\left(\tau, X_{k-1}(\tau), Y_{k-1}(\tau)\right) d\tau -$$

$$\left. - \int\limits_0^\omega \left[G_2\left(\tau, X_k(\tau), Y_k(\tau)\right) - A_2(\tau) Y_k(\tau) \right] d\tau \right\}, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{8}$$

Изучены вопросы сходимости, скорости сходимости алгоритма (7), (8).

Литература

1. Лаптинский В. Н., Роголев Д. В. *Конструктивные методы построения решения периодической краевой задачи для системы матричных дифференциальных уравнений типа Риккати* // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47. № 10. С. 1412–1420.

2. Зубов В. И. *Лекции по теории управления.* М. : Наука, 1975.

3. Параев Ю. И. *Уравнения Ляпунова и Риккати.* Томск : Томск. гос. ун-т, 1989.

4. Егоров А. И. *Уравнения Риккати.* М. : Физматлит, 2001.

5. Анисович В. В., Крюков Б. И., Мадорский В. М. *Об одном подходе к решению задач оптимального управления* // Доклады АН СССР. 1980. Т. 251. № 2. С. 265–268.

6. Лаптинский В. Н. *Конструктивный анализ управляемых колебательных систем.* Мн. : ИМ НАН Беларуси, 1998.

7. Лаптинский В. Н., Роголев Д. В. *О разрешимости периодической краевой задачи для системы матричных дифференциальных уравнений Риккати* // Веснік Магілёўскага дзярж. ун-та імя А.А.Куляшова. Сер. B, Прыродазнаўчыя навукі (матэматыка, фізіка, біялогія). 2010. № 1(35). Могилёв : МГУ. 2010. С. 12–23.

8. Роголев Д. В. *Анализ периодической краевой задачи для системы матричных уравнений типа Риккати* // Веснік Магілёўскага дзярж. ун-та імя А.А.Куляшова. Сер. B, Прыродазнаўчыя навукі (матэматыка, фізіка, біялогія). 2011. № 1(37). Могилёв : МГУ. 2011. С. 4–19.

9. Роголев Д. В. *Разрешимость и построение решения периодической краевой задачи для обобщённой системы матричных дифференциальных уравнений Риккати* // Теория управления и математическое моделирование: материалы Всероссийской конф. с междунар. участием, Ижевск, Россия, 13–17 июня 2022 г. Ижевск : Изд. центр «Удмуртский университет». 2022. С. 114–117.

О СИЛЬНОЙ ИЗОХРОННОСТИ ГРУБОГО ФОКУСА

А. Е. Руденок

Рассмотрим систему

$$\frac{dx}{dt} = -y + \lambda x + P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = x + \lambda y + Q(x, y), \tag{1}$$

$\lambda \neq 0, P, Q$ – голоморфные в окрестности точки $O(0,0)$, начинающиеся со степеней ≥ 2. Пусть $\Gamma_k : \gamma(x, y, k) = 0$ – голоморфное в окрестности точки $O(0,0)$ семейство кривых без контакта с полем направлений системы, пересекающихся в точке $O(0,0)$ с разными угловыми коэффициентами k. Точка O рассекает кривую Γ_k на две дуги: Γ_k^+ и Γ_k^-. Кривые Γ_k называются изохронами системы, если любая траектория системы (1), пересекающая дугу Γ_k^+ при значении $t = t_0$ пересекает дугу Γ_k^- при значении $t = t_0 + \pi$. Если изохроны системы существуют, то особая точка $O(0,0)$ называется изохронной. Справедлива

Теорема 1[1]. *Существует голоморфная замена*

$$u = x + U(x, y), \quad v = y + V(x, y),$$