

$$\begin{aligned}
 & - \int_t^\omega \left( \int_\tau^\omega A_2(\sigma) d\sigma \right) G_2(\tau, X_{k-1}(\tau), Y_{k-1}(\tau)) d\tau - \\
 & \left. - \int_0^\omega [G_2(\tau, X_k(\tau), Y_k(\tau)) - A_2(\tau)Y_k(\tau)] d\tau \right\}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (8)
 \end{aligned}$$

Изучены вопросы сходимости, скорости сходимости алгоритма (7), (8).

### Литература

1. Лаптинский В. Н., Роголев Д. В. *Конструктивные методы построения решения периодической краевой задачи для системы матричных дифференциальных уравнений типа Риккати* // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47. № 10. С. 1412–1420.
2. Зубов В. И. *Лекции по теории управления*. М. : Наука, 1975.
3. Параев Ю. И. *Уравнения Ляпунова и Риккати*. Томск : Томск. гос. ун-т, 1989.
4. Егоров А. И. *Уравнения Риккати*. М. : Физматлит, 2001.
5. Анисович В. В., Крюков Б. И., Мадорский В. М. *Об одном подходе к решению задач оптимального управления* // Доклады АН СССР. 1980. Т. 251. № 2. С. 265–268.
6. Лаптинский В. Н. *Конструктивный анализ управляемых колебательных систем*. Мн. : ИМ НАН Беларуси, 1998.
7. Лаптинский В. Н., Роголев Д. В. *О разрешимости периодической краевой задачи для системы матричных дифференциальных уравнений Риккати* // Веснік Магілёўскага дзярж. ун-та імя А.А.Куляшова. Сер. В, Прыродазнаўчыя навукі (матэматыка, фізіка, біялогія). 2010. № 1(35). Могилёв : МГУ. 2010. С. 12–23.
8. Роголев Д. В. *Анализ периодической краевой задачи для системы матричных уравнений типа Риккати* // Веснік Магілёўскага дзярж. ун-та імя А.А.Куляшова. Сер. В, Прыродазнаўчыя навукі (матэматыка, фізіка, біялогія). 2011. № 1(37). Могилёв : МГУ. 2011. С. 4–19.
9. Роголев Д. В. *Разрешимость и построение решения периодической краевой задачи для обобщённой системы матричных дифференциальных уравнений Риккати* // Теория управления и математическое моделирование: материалы Всероссийской конф. с междунар. участием, Ижевск, Россия, 13–17 июня 2022 г. Ижевск : Изд. центр «Удмуртский университет». 2022. С. 114–117.

## О СИЛЬНОЙ ИЗОХРОННОСТИ ГРУБОГО ФОКУСА

А. Е. Руденок

Рассмотрим систему

$$\frac{dx}{dt} = -y + \lambda x + P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = x + \lambda y + Q(x, y), \quad (1)$$

$\lambda \neq 0, P, Q$  – голоморфные в окрестности точки  $O(0, 0)$ , начинающиеся со степеней  $\geq 2$ . Пусть  $\Gamma_k : \gamma(x, y, k) = 0$  – голоморфное в окрестности точки  $O(0, 0)$  семейство кривых без контакта с полем направлений системы, пересекающихся в точке  $O(0, 0)$  с разными угловыми коэффициентами  $k$ . Точка  $O$  рассекает кривую  $\Gamma_k$  на две дуги:  $\Gamma_k^+$  и  $\Gamma_k^-$ . Кривые  $\Gamma_k$  называются изохронами системы, если любая траектория системы (1), пересекающая дугу  $\Gamma_k^+$  при значении  $t = t_0$  пересекает дугу  $\Gamma_k^-$  при значении  $t = t_0 + \pi$ . Если изохроны системы существуют, то особая точка  $O(0, 0)$  называется изохронной. Справедлива

**Теорема 1**[1]. *Существует голоморфная замена*

$$u = x + U(x, y), \quad v = y + V(x, y),$$

переводящая систему (1) в линейную систему

$$\frac{du}{dt} = -v + \lambda u, \quad \frac{dv}{dt} = u + \lambda v.$$

Здесь  $U(x, y), V(x, y)$  – функции без линейных членов.

Из теоремы 1 следует, что голоморфная система (1), имеющая грубый фокус в начале координат, является изохронной. Изохронами системы являются кривые  $y + V(x, y) = k(x + U(x, y))$ .

**Теорема 2.** Для того чтобы система (1) была сильно изохронной, необходимо и достаточно, чтобы существовала голоморфная замена

$$u = x + U(x, y), \quad v = y,$$

переводящая систему (1) в систему вида

$$\frac{du}{dt} = -v + \lambda u + uF(u, v), \quad \frac{dv}{dt} = u + \lambda v + vF(u, v).$$

В качестве примера рассмотрим систему

$$\frac{dx}{dt} = -y + \lambda x + ax^2 + bxy + Ay^2, \quad \frac{dy}{dt} = x + \lambda y + Ax^2 + Bxy + Cy^2. \quad (2)$$

**Теорема 3.** Для того чтобы система (2) была сильно изохронной, необходимо и достаточно, чтобы она была одной из систем

- 1)  $\frac{dx}{dt} = -y + x\lambda + 48x^2(-a + m\lambda) + 4y^2(3a - 2m\lambda + a\lambda^2) + 8xy(2m - a\lambda + 3m\lambda^2)$ ,
- 2)  $\frac{dx}{dt} = -y + x\lambda + 2bxy - bx^2\lambda + by^2\lambda, \quad \frac{dy}{dt} = x + y\lambda - bx^2 + by^2 - 2bxy\lambda$ .
- 3)  $\frac{dx}{dt} = -y + x\lambda + 12my^2(2s - 3\lambda) + 4mx^2\lambda s^2 - 8mxy(18 + s^2)$ ,  
 $\frac{dy}{dt} = x + y\lambda + 4mx^2s^2 - 4my^2(9 + 4s^2 - 6s\lambda) + 8mxy s(6 + s\lambda)$ .
- 4)  $\frac{dx}{dt} = -y + x\lambda + 48x^2(-a + m\lambda) + 4y^2(3a - 2m\lambda + a\lambda^2) + 8xy(2m - a\lambda + 3m\lambda^2)$ ,  
 $\frac{dy}{dt} = x + y\lambda - 24xy(a - m\lambda) + 4y^2(m - 2a\lambda + 3m\lambda^2)$ .

Соответствующие уравнения их изохрон:

- 1)  $y = kx(1 + 4mx)$ ,
- 2)  $y = k(x - bx^2 - by^2)$ ,
- 3)  $y = k(36my^2 + 4mx^2s^2 + x(1 + 24msy))$ ,
- 4)  $y(1 - 12ay + 12my\lambda) = k(x - 4my^2 - 4ay^2\lambda)$ ,

где  $k$  – угловой коэффициент касательной к изохроне в начале координат.

**Теорема 4.** Изохроны каждой из систем 1) - 4) кроме точки пересечения  $O(0, 0)$  имеют еще одну точку пересечения  $O_1$ , которая, в свою очередь, является грубым изохронным фокусом системы. Изохронами этого фокуса является те изохроны фокуса  $O(0, 0)$ , которые проходят через точку  $O_1$ .

Ниже на рис. 1 представлены траектории системы 2) при значениях  $\lambda = b = 1$ , два изохронных фокуса  $O(0, 0), O_1(1, 0)$  и два изохронных сечения: окружности  $ky = x - x^2 - y^2$ ,  $k = 0, k = 1/8$ , общие для обоих фокусов. На рис. 2 изображены изохронные фокусы  $O(0, 0), O_1(1, 0)$ , изохронное сечение  $x - x^2 - y^2 = 0$ , полутраектории  $\widehat{A_1A_2}, \widehat{B_1B_2}$  от  $t = 0$  до  $t = \pi$  и две следующие полутраектории от  $t = \pi$  до  $t = 2\pi$ . Графики выполнены компьютерной системой “Mathematica”.

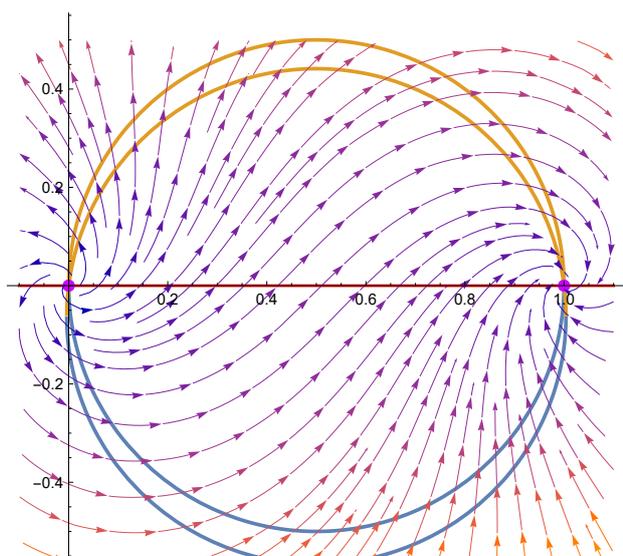


Рис. 1. Траектории системы 2.

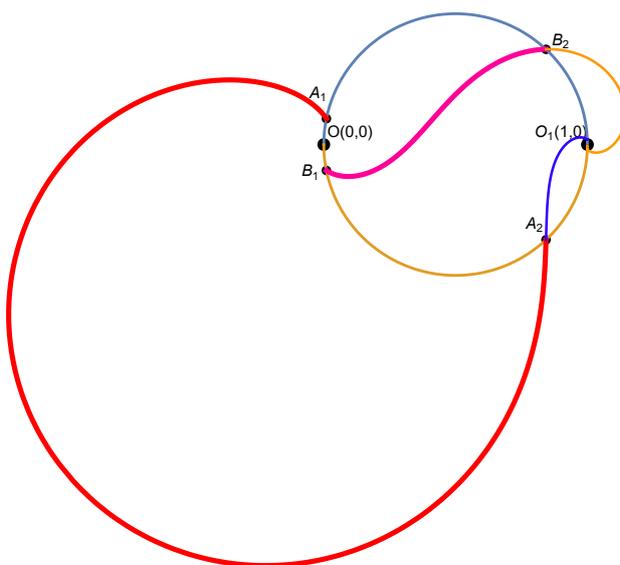


Рис.2. Полутраектории системы 2.

**Литература**

1. Chow S.N., Li C., Wang D. *Normal Forms and Bifurcation of Planar Vector Fields*. Cambridge University Press, 1994.

**ПРЕДЕЛЬНЫЕ ЦИКЛЫ «НОРМАЛЬНОГО» РАЗМЕРА СИСТЕМ ЛЬЕНАРА ТИПА  $2A + 3S$  И  $3A + 2S$**

**И.Н. Сидоренко**

Рассмотрим систему Льенара с пятью простыми особыми точками

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -g(x) - \epsilon f(x)y, \tag{1}$$

где  $g(x)$  - полином 5-ой степени,  $\epsilon > 0$ ,  $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ . В данной работе рассматривается только тот случай, когда полином  $g(x)$  имеет 5 простых корней, и тогда система (1) может иметь следующие конфигурации особых точек  $2A + 3S$  и  $3A + 2S$ . Данная работа является обобщением результатов полученных в [1, 2, 3] на случай не симметричного векторного поля. Целью данной работы является исследование максимального количества предельных циклов «нормального размера», а также построение систем (1) с заданным количеством предельных циклов.

Без ограничения общности будем предполагать, что точка  $O(0, 0)$  является особой точкой системы (1) и справа и слева от неё располагается одинаковое количество особых точек. Таким образом возможны следующие варианты:

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = x(1 - x)(1 + Lx)(1 - Mx)(1 + Wx) - \epsilon f(x)y, \tag{2}$$

где  $0 < W < L, 0 < M < 1$ , тогда система (2) имеет конфигурацию особых точек  $2A + 3S$  - 2 антиседла и 3 седла, причем точка  $O(0, 0)$  - седло, а точки  $A(-\frac{1}{L}, 0)$  и  $E(1, 0)$  - антиседла (рисунок 1).