которая вместе с преобразованием (6) позволяет построить алгебру симметрий Вейля типа $A_1^{(1)}$ для стандартной иерархии второго уравнения Пенлеве. В частности, можно построить рациональные решения для всех $\alpha \in \mathbb{Z}$ и решения Эйри для всех $\alpha = n + 1/2, n \in \mathbb{Z}$. Уравнение (1) в общем случае такой симметрии не имеет. Однако, для некоторых значений параметров уравнение (1) также может иметь дополнительные симметрии. Так, например, для уравнения (4) с ограничением $\beta_1 = 0, \gamma = 1/6$ имеем уравнение

$$w^{(4)} - 5w'w'' - 5w^2w'' - 5w(w')^2 - zw + w^5 - \alpha = 0, \tag{7}$$

которое вместе с симметрией (6) имеет дополнительную симметрию.

Теорема 2. *Пусть* $w = w(z, \alpha)$ − *решение уравнения (7) при фиксированном значении параметра* α *, такое, что*

$$R(z, w) = z - w^4 - 4w^2w' - 3(w')^2 + ww'' + w''' \neq 0.$$

Тогда преобразование

$$B_2 : w \to \tilde{w} = w + 2(\alpha + 1)/R(z, w)$$

определяет решение уравнения (7) при $\tilde{\alpha} = -\alpha - 2$.

Заметим, что уравнение (7) является уравнением четвертого порядка иерархии (K_2), для которого, используя композиции преобразований B_1 и B_2, можно построить все рациональные решения и специальные классы трансцендентных решений [3], а формулы (1), (2) в этом случае определяют альтернативный метод определения уравнения четвертого порядка иерархии (K_2).

Литература

1. Gromak V.I. *The Backlund transformations of the higher order Painleve equations.* // CRM Proceedining and Lecture Notes, Amer. Math. Soc., Providence. 2001. Vol. 29. P. 3-28.

2. Rogers C., Schief W.K. *Backlund and Darboux Transformations. Geometry and modern applications in soliton theory.* Cambridge University Press. Cambridge, 2002.

3. Gromak V.I. *On Fourth-Order Nonlinear Differential Equations with the Painleve Property.* // Differential Equations, 2006. Vol. 42. No. 8. P. 1076–1085.

О ГЛОБАЛЬНОЙ МЕРОМОРФНОСТИ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ, СВЯЗАННЫХ СО ВТОРЫМ УРАВНЕНИЕМ ПЕНЛЕВЕ И ЕГО ИЕРАРХИЕЙ

Е.В. Громак, В.И. Громак

В работе рассматриваются аналитические свойства решений линейных уравнений второго порядка с коэффициентами, зависящими от решений второго уравнения Пенлеве и решений первых уравнений обобщенной иерархии второго уравнения Пенлеве. Методом Фробениуса установлены достаточные условия мероморфности общего решения и интегрируемость в замкнутой форме в рациональных функциях линейного уравнения второго порядка с потенциалом, связанным с рациональными решениями уравнений обобщенной иерархии, которая имеет вид

$$\widetilde{P}_2^{[2N]} : \left(\frac{d}{dz} + 2w\right) \widetilde{L}_N[w' - w^2] - zw - \alpha = 0, \qquad N = 1, 2, ..., \tag{1}$$

где оператор $\widetilde{L}_N$ определяется рекуррентным соотношением

$$\frac{d}{dz}\widetilde{L}_{N+1}[u] = [(\frac{d^3}{dz^3} + (4u+\beta_N)\frac{d}{dz} + 2u_z)\widetilde{L}_N[u], \quad \widetilde{L}_1[u(z)] = u(z), \quad N = 1, 2, ...,$$

где α, β_N – параметры. Тогда для $N = 1, 2, 3$ последовательно имеем первые три уравнения иерархии:

$$\widetilde{P}_2^{[2]} : w'' = 2w^3 + zw + \alpha, \tag{2}$$

$$\widetilde{P}_2^{[4]} : w^{(4)} = 10\,w^2 w'' + 10\,w(w')^2 - 6\,w^5 - \beta_1(w'' - 2w^3) + zw + \alpha, \tag{3}$$

$$\begin{aligned}&\widetilde{P}_2^{[6]} : w^{(6)} = 2\,w^2(5(\beta_1+\beta_2)w'' + 7w^{(4)}) - w^{(4)}(\beta_1+\beta_2) - 70w^4 w'' + \\ &+ w(10(\beta_1+\beta_2)(w')^2 + 42(w'')^2 + 56\,w'w^{(3)}) - (\beta_1\beta_2 - 70(w')^2)w'' \\ &+ 2w^3(\beta_1\beta_2 - 70(w')^2) - 6\,w^5(\beta_1+\beta_2) + 20\,w^7 + zw + \alpha.\end{aligned} \tag{4}$$

Эту иерархию называют обобщенной иерархией второго уравнения Пенлеве, так как первое уравнение этой иерархии, также как и первое уравнение иерархии $P_2^{[2N]}$, есть второе уравнение Пенлеве, а последующие уравнения обобщают соответствующие уравнения иерархии $P_2^{[2N]}$, при этом иерархия $P_2^{[2N]}$ может быть получена из иерархии $\widetilde{P}_2^{[2N]}$ при $\beta = 0$, $\beta = (\beta_1, ..., \beta_{N-1})$ [1]. Известно, что уравнения иерархии при произвольных значениях параметров α, β обладают свойством мероморфного продолжения, т.е. любое локальное голоморфное решение допускает аналитическое продолжение до глобально мероморфного решения [2].

Одним из основных инструментов исследования аналитических свойств решений уравнения (1) является преобразование Беклунда, которое позволило, в частности, доказать трансцендентность уравнения (2), а также разбить множество решений на три класса: 1. Рациональные решения; 2. Решения Эйри; 3. Трансцендентные решения, т.е. решения, не входящие в первые два класса.

Рациональные решения $N-$го уравнения (1) существуют только при $\alpha \in \mathbb{Z}$. Они порождаются тривиальным решением $w^{[N]} = 0$ при $\alpha = 0$ и последовательным применением к нему преобразования Беклунда. При каждом $\alpha \in \mathbb{Z}$ рациональное решение единственно и имеет структуру

$$w_n^{[N]}(z) = \frac{d}{dz}\ln\left(Q_{n-1}^{[N]}/Q_n^{[N]}\right), \ \alpha = n \in \mathbb{N},$$

где полиномы Яблонского-Воробьева $Q_n^{[N]}(z)$ определяются рекуррентным соотношением

$$Q_{n+1}^{[N]}Q_{n-1}^{[N]} = z(Q_n^{[N]})^2 - 2(Q_n^{[N]})^2\widetilde{L}_N[2\frac{d^2}{dz^2}\ln(Q_n^{[N]})], \ Q_0^{[N]} = 1, \ Q_1^{[N]} = z, \ n = 1, 2, 3, ... \ .$$

Для $\alpha = -n$, $n \in \mathbb{N}$, рациональное решение $w_{-n}^{[N]}(z) = -w_n^{[N]}(z)$ и $w^{[N]} = 0$ для $\alpha = 0$.

Решения второго класса порождаются решениями уравнений $\widetilde{L}_N[w' - w^2] - z/2 = 0$, $\alpha = 1/2$ при последовательном применении к ним преобразований Беклунда. Для уравнения (2) эти решения рациональным образом выражаются через функции Эйри и ее производные.

Произвольное решение $w^{[N]}(z)$ из третьего класса имеет бесконечное число полюсов с целыми вычетами из множества $\{\pm 1, \pm 2, ..., \pm(N-1)\}$.

В настоящей работе на множестве решений уравнения (1) рассматриваем линейное уравнение

$$u'' + (aw^2 + bw + cw' + \mu)u = 0, \tag{5}$$

где $w(z)$ – фиксированное решение $N-$ го уравнения (1), а $a, b, c, \mu-$ постоянные параметры. Нас интересуют условия на параметры, при выполнении которых любое локальное голоморфное решение уравнения (5) допускает аналитическое продолжение до глобально мероморфного решения, т.е. общее решение уравнения (5) мероморфно или даже рационально. Ясно, что уравнение (5) – уравнение с конечными регулярными особыми точками в полюсах $w(z)$ и для построения фундаментальной системы можно использовать метод Фробениуса. При этом наряду с регулярностью конечных особых точек $z = z_j$ необходима целостность показателей, относящихся к особым точкам и отсутствие в разложениях решений в окрестностях особых точек логарифмов $ln(z - z_j)$. Справедлива

Теорема 1. *Если для уравнения (5), где $w(z)$ – фиксированное решение уравнений (2)–(4), выполняется хотя бы одно из условий*

$$a)\ a = b = c = 0;\quad b)\ a = -1,\ b = 0,\ c = 1;\quad c)\ a = -1,\ b = 0,\ c = -1, \tag{6}$$

то общее решение уравнения (5) мероморфно.

Исключая тривиальный случай (6a), в случаях (6b) и (6c) имеем уравнения

$$u'' + (\varepsilon w' - w^2 + \mu)u = 0,\quad \varepsilon^2 = 1, \tag{7}$$

Для того, чтобы общее решение уравнения (5) было рациональным, необходимо, чтобы для решения $u(z)$ точка $z = \infty$ была полюсом или точкой голоморфности. Справедлива

Теорема 2. *Если в уравнении (7) $\mu = 0$ и $w(z) = Q'_{n-1}(z)/Q_{n-1}(z) - Q'_n(z)/Q_n(z)$ – рациональное решение уравнения (1) при $\alpha = n \in \mathbb{Z}_+$, где $Q_n = Q_n^{[N]}$ – полиномы Яблонского–Воробьева, то общее решение уравнения (7) имеет вид $u(z) = (C_1Q_n + C_2Q_{n-2})/Q_{n-1}$ при $\varepsilon = 1$ и $u(z) = (C_1Q_{n-1}(z) + C_2Q_{n+1}(z))/Q_n(z)$. при $\varepsilon = -1$.*

Заметим, что для второго уравнения Пенлеве (2) результаты работы частично получены в [3].

Литература

1. Громак В. И. *Аналитические свойства решений уравнений обобщенной иерархии второго уравнения Пенлеве* // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. №8. С. 1017–1033.

2. Домрин А.В., Сулейманов Б.И., Шумкин М.А.. *О глобальной мероморфности решений уравнений Пенлеве и их иерархий* // Труды Математического института им. В.А.Стеклова. 2020. Т. 311. С. 106–122.

3. Громак Е.В. *О мероморфных решениях линейных уравнений второго порядка, связанных со вторым уравнением Пенлеве*// Веснік Гродзенскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя Янкі Купалы. Серыя 2. Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. 2022. Т. 12. № 3. С. 42–49.

СВОЙСТВО ПЕНЛЕВЕ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

Л.В. Детченя, Е.Е. Кулеш, В.М. Пецевич

Целью данной работы является поиск необходимых и достаточных условий наличия свойства Пенлеве у решений системы двух дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} x'^2 &= (\alpha_1 x + \alpha_2)(K_1 y^2 + xy + K_2), \\ y'^2 &= (y + \beta_1)(K_1 y^2 + xy + K_2), \end{aligned} \tag{1}$$