

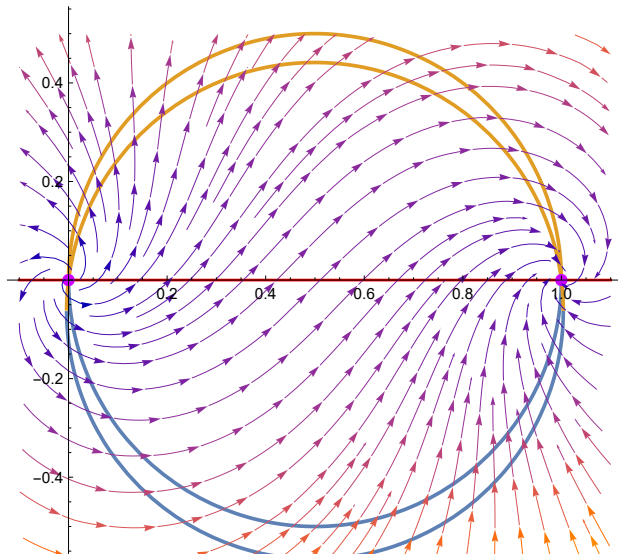


Рис. 1. Траектории системы 2.

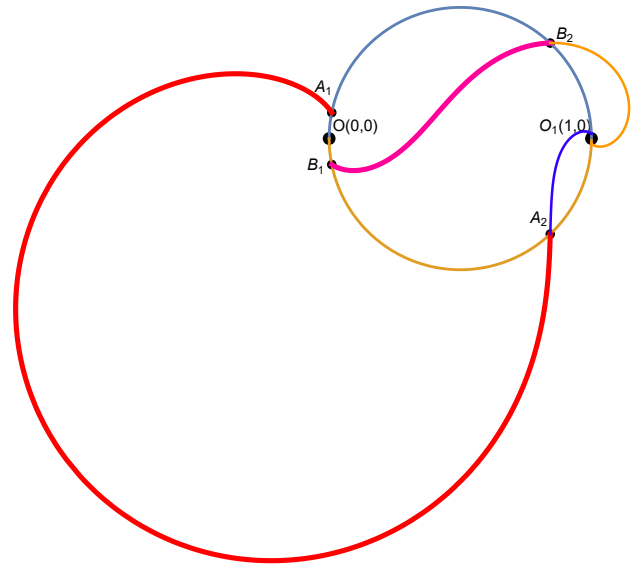


Рис.2. Полутраектории системы 2.

Литература

1. Chow S.N., Li C., Wang D. *Normal Forms and Bifurcation of Planar Vector Fields*. Cambridge University Press, 1994.

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ЦИКЛЫ «НОРМАЛЬНОГО» РАЗМЕРА СИСТЕМ ЛЬЕНАРА ТИПА $2A + 3S$ И $3A + 2S$

И.Н. Сидоренко

Рассмотрим систему Льенара с пятью простыми особыми точками

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -g(x) - \epsilon f(x)y, \quad (1)$$

где $g(x)$ - полином 5-ой степени, $\epsilon > 0$, $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$. В данной работе рассматривается только тот случай, когда полином $g(x)$ имеет 5 простых корней, и тогда система (1) может иметь следующие конфигурации особых точек $2A + 3S$ и $3A + 2S$. Данная работа является обобщением результатов полученных в [1, 2, 3] на случай не симметричного векторного поля. Целью данной работы является исследование максимального количества предельных циклов «нормального размера», а также построение систем (1) с заданным количеством предельных циклов.

Без ограничения общности будем предполагать, что точка $O(0,0)$ является особой точкой системы (1) и справа и слева от неё располагается одинаковое количество особых точек. Таким образом возможны следующие варианты:

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = x(1-x)(1+Lx)(1-Mx)(1+Wx) - \epsilon f(x)y, \quad (2)$$

где $0 < W < L, 0 < M < 1$, тогда система (2) имеет конфигурацию особых точек $2A + 3S$ - 2 седла и 3 антиседла, причем точка $O(0,0)$ - седло, а точки $A(-\frac{1}{L}, 0)$ и $E(1,0)$ - антиседла (рисунок 1).

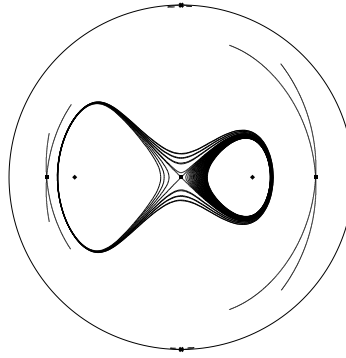


Рисунок 1. Фазовый портрет системы (2) на сфере Пуанкаре

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -x(1-x)(1+Lx)(1-Mx)(1+Wx) - \epsilon f(x)y, \quad (3)$$

где $0 < W < L, 0 < M < 1$, тогда система (2) имеет конфигурацию особых точек $3A + 2S - 3$ антиседла и 2 седла, причем точки $O(0, 0)$ - антиседло, а точки $A(-\frac{1}{L}, 0)$ и $E(1, 0)$ - седла (рисунок 2).

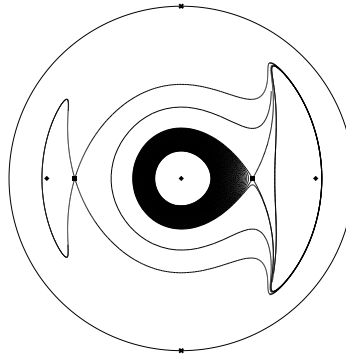


Рисунок 2. Фазовый портрет системы (3) на сфере Пуанкаре

Для исследования применяется разработанный прогнозный метод оценки числа предельных циклов «нормального размера» для систем Льенара [2] и метод возмущения негрубого фокуса [3].

Определение 1. Пусть система Льенара (1) имеет антиседло $(0_0, 0)$. Обозначим, через ξ_1 (ξ_2) - абсциссу ближайшей слева (справа) к точке А особой точки, если слева (справа) особых точек нет, то считаем $\xi_1 = -\infty$ ($\xi_2 = +\infty$). Системой прогноза вокруг особой точки $(0_0, 0)$ для системы Льенара (1) будем называть систему

$$F(\eta) = F(\mu), \quad G(\eta) = G(\mu), \quad (4)$$

где $F(\eta) = \int_{x_0}^{\eta} f(x)dx$, $G(\eta) = \int_{x_0}^{\eta} g(x)dx$, $\xi_1 < \eta < x_0$, $x_0 < \mu < \xi_2$.

Сформулированное определения остаётся справедливым и для оценки числа предельных циклов вокруг группы особых точек с суммарным индексом равным +1. В данном случае в качестве x_0 необходимо брать «центральную» точку (это может быть и седло), ξ_1 , ξ_2 - абсциссы ближайших левой и правой особых точек, не входящих в группу вокруг которой производится оценка, а $\xi_1 < \eta < \zeta_1$, $\zeta_2 < \mu < \xi_2$, где ζ_1 , ζ_2 - находятся из условия $G(\zeta_1) = G(\zeta_2) = \max G(x_i)$, $\zeta_1 < x_i < \zeta_2$, x_i - абсциссы всех особых точек, вокруг которых производится оценка числа предельных циклов.

Метод возмущения негрубого фокуса. Обозначим через a – вектор коэффициентов системы (1), и пусть при $a = a^0$ система имеет k предельных циклов вокруг точки $O(0, 0)$, которые распределены не равномерно. Выберем на промежутке $I = [p, q]$, $p > 0$ точки $x_1, \dots, x_{k+1}$ и рассмотрим функцию последования $\Delta(x, a^0 + \Delta a)$, $x \in I$, Δa некоторое возмущение системы (1), тогда $\Delta(x_i, a^0 + \Delta a) = \Delta(x_i, a^0) + \sum_{j=1}^n tp(i, j)\Delta a_j + o(\Delta a)$, где $tp(i, j) = \frac{\partial \Delta^k(x_i^k, a^0)}{\partial a_j}$ находятся численно. Далее решаем задачу линейного программирования

$$L \rightarrow \min, \pm(-1)^i \left(\Delta(x_i, a^0) + \sum_{j=1}^n tp^k(i, j)\Delta a_j \right) \geq 0, \quad i = \overline{1, k+1}, |\Delta a_j| \leq L. \quad (5)$$

Если задача (5) имеет решение $\Delta a = \Delta a^*$, $L = L^*$, то соответствующая система Лъенара имеет, по крайней мере, k предельных циклов.

Пример. Система Лъенара

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = x(1-x)(1+\frac{1}{2}x)(1-\frac{1}{4}x)(1+\frac{1}{4}x) - \frac{1}{100}(-1.64 + 0.84x + x^2)y,$$

имеет два предельных цикла, окружающие группу особых точек и один предельный цикл вокруг фокуса $E(1, 0)$.

Теорема 1. Если $G(0) \geq G(-\frac{1}{M})$ или $G(0) \geq G(\frac{1}{W})$, то система прогноза (4) составленная для группы особых точек $O(0, 0)$, $A(-\frac{1}{L}, 0)$ и $E(1, 0)$ не имеет решения.

Гипотеза Максимальное число предельных циклов, окружающих группу особых точек, у системы (1) не меньше 3.

Литература

1. Сидоренко И. Н. *Предельные циклы «нормального размера», окружающие группу особых точек систем Лъенара с симметрией* // Веснік Магілёўскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя АА Куляшова. Сер. В. Прыродазнаўчыя навукі (матэматыка, фізіка, біялогія). 2019. № 2. С. 21–29.
2. Сидоренко, И. Н. *Предельные циклы кубической системы Лъенара типа $2A + 1S$* / И.Н. Сидоренко // Веснік Магілёўскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя АА Куляшова. Серія В. Прыродазнаўчыя навукі: матэматыка, фізіка, біялогія. Могилев. 2022. №2. С. 21–29.
3. Гринь А.А., Кузьмич А.В., Сидоренко И.Н. *Распределения предельных циклов квадратичных систем с фокусом и антиседлом на фазовой плоскости и двумя седлами и узлом в бесконечности* / А.А. Гринь, А.В. Кузьмич, И.Н. Сидоренко // Вестник Гродненского государственного университета имени Янки Купалы. Серия 2. Математика. Физика. Информатика, вычислительная техника и управление. Гродно. 2022. Т. 12. № 1. – С. 6–15.
4. Черкас Л.А., Гринь А.А., Булгаков В.И. *Конструктивные методы исследования предельных циклов автономных систем второго порядка (численно-алгебраический подход)*. Гродно. ГрГУ. 2013.

О ПРОБЛЕМЕ ЦЕНТРА ДЛЯ СИСТЕМЫ ДАРБУ

Д.Н. Чергинец

Рассмотрим систему Дарбу

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= N(x, y) + xP(x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= M(x, y) + yP(x, y), \end{aligned}$$