Метод возмущения негрубого фокуса. Обозначим через a − вектор коэффициентов системы (1), и пусть при $a = a^0$ система имеет k предельных циклов вокруг точки $O(0,0)$, которые распределены не равномерно. Выберем на промежутке $I = [p,q]$, $p > 0$ точки $x_1, ..., x_{k+1}$ и рассмотрим функцию последования $\Delta(x, a^0 + \Delta a)$, $x \in I$, Δa некоторое возмущеие системы (1), тогда $\Delta(x_i, a^0 + \Delta a) = \Delta(x_i, a^0) + \sum\limits_{j=1}^{n} tp(i,j)\Delta a_j + o(\Delta a)$, где $tp(i,j) = \frac{\partial \Delta^k(x_i^k, a^0)}{\partial a_j}$ находятся численно. Далее решаем задачу линейного программирования

$$L \to \min,\ \pm(-1)^i \left(\Delta(x_i, a^0) + \sum_{j=1}^{n} tp^k(i,j)\Delta a_j \right) \geq 0,\ i = \overline{1, k+1},\ |\Delta a_j| \leq L. \qquad (5)$$

Если задача (5) имеет решение $\Delta a = \Delta a^*$, $L = L^*$, то соответствующая система Льенара имеет, по крайней мере, k предельных циклов.

Пример. Система Льенара

$$\frac{dx}{dt} = y,\ \ \frac{dy}{dt} = x(1-x)(1+\frac{1}{2}x)(1-\frac{1}{4}x)(1+\frac{1}{4}x) - \frac{1}{100}(-1.64 + 0.84x + x^2)y,$$

имеет два предельных цикла, окружающие группу особых точек и один предельный цикл вокруг фокуса $E(1,0)$.

Теорема 1. *Если $G(0) >= G(-\frac{1}{M})$ или $G(0) >= G(\frac{1}{W})$, то система прогноза (4) составленная для группы особых точек $O(0,0)$, $A(-\frac{1}{L}, 0)$ и $E(1,0)$ не имеет решения.*

Гипотеза *Максимальное число предельных циклов, окружающих группу особых точек, у системы (1) не меньше 3 .*

Литература

1. Сидоренко И. Н.*Предельные циклы «нормального размера», окружающие группу особых точек систем Льенара с симметрией* // Веснік Магілёўскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя АА Куляшова. Сер. В. Прыродазнаўчыя навукі (матэматыка, фізіка, біялогія). 2019. № 2. С. 21–29.

2. Сидоренко, И. Н. *Предельные циклы кубической системы Льенара типа 2A + 1S* / И.Н. Сидоренко // Веснік Магілёўскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя АА Куляшова. Серыя В. Прыродазнаўчыя навукі: матэматыка, фізіка, біялогія. Могилев. 2022. №2. С. 21–29.

3. Гринь А.А., Кузьмич А.В., Сидоренко И.Н. *Распределения предельных циклов квадратичных систем с фокусом и антиседлом на фазовой плоскости и двумя седлами и узлом в бесконечности* / А.А. Гринь, А.В. Кузьмич, И.Н. Сидоренко // Вестник Гродненского государственного университета имени Янки Купалы. Серия 2. Математика. Физика. Информатика, вычислительная техника и управление. Гродно. 2022. Т. 12. № 1. – С. 6–15.

4. Черкас Л.А., Гринь А.А., Булгаков В.И. *Конструктивные методы исследования предельных циклов автономных систем второго порядка (численно-алгебраический подход).* Гродно. ГрГУ. 2013.

О ПРОБЛЕМЕ ЦЕНТРА ДЛЯ СИСТЕМЫ ДАРБУ

Д.Н. Чергинец

Рассмотрим систему Дарбу

$$\begin{aligned} \tfrac{dx}{dt} &= N(x,y) + xP(x,y), \\ \tfrac{dy}{dt} &= M(x,y) + yP(x,y), \end{aligned}$$

где P – однородный многочлен степени m, M, N – однородные многочлены степени n. Система Дарбу при помощи замены переменных и исключения времени сводится к уравнению Бернулли [1, гл.1, §8]. Доказательство алгебраической неразрешимости проблемы центра и фокуса в работах [2, 3] проводилось, используя систему Дарбу, что говорит о важности изучения проблемы центра для системы Дарбу.

Пусть
$$B(x,y) \equiv yN(x,y) - xM(x,y) \neq 0 \quad \text{при} \ (x,y) \neq (0,0). \tag{1}$$
Не ограничивая общности рассуждений, рассмотрим случай, когда $B(x,y) > 0$ при $(x,y) \neq (0,0)$.

Следуя [4, 5], в системе Дарбу выполним замену переменных
$$u = xB^k(x,y), \quad v = yB^k(x,y), \qquad \text{где} \ k = \frac{-1}{n+1}. \tag{2}$$

$$\frac{du}{dt} = \left(xB^k\right)'_t = \left(xB^k\right)'_x (N + xP) + \left(xB^k\right)'_y (M + yP) =$$
$$= NB^k + xPB^k + kxPB^{k-1}\left(xB'_x + yB'_y\right) + kxB^{k-1}(NB'_x + MB'_y).$$
Для любого однородного многочлена B степени $n+1$ справедливо равенство
$$xB'_x + yB'_y = (n+1)B.$$
Также нетрудно доказать, что $NB'_x + MB'_y = B(N'_x + M'_y)$. Воспользовавшись записанными равенствами, получим
$$\frac{du}{dt} = NB^k + (1 + k(n+1))xPB^k + kxB^k(N'_x + M'_y).$$
Заменив время $dt = B^{k(n-1)}dT$, находим
$$\frac{du}{dT} = N(x,y)B^{kn}(x,y) + kxB^{kn}(x,y)(N'_x(x,y) + M'_y(x,y)).$$
Аналогично нетрудно выразить $\frac{dv}{dT}$. С учетом (2) получаем
$$\frac{du}{dT} = N(u,v) - \theta\left(N'_u(u,v) + M'_v(u,v)\right)u,$$
$$\frac{dv}{dT} = M(u,v) - \theta\left(N'_u(u,v) + M'_v(u,v)\right)v. \tag{3}$$
Здесь $N(u,v)$, $M(u,v)$ получены из $N(x,y)$, $M(x,y)$ подстановкой вместо x,y переменных u,v без учета (2), $\theta = 1/(n+1)$. В работах [4, 5] имеется опечатка, так как в них $\theta = 2/(n+1)^2$. Докажем, что начало координат для системы (3) является центром.

Перейдем от системы (3) к однородному уравнению
$$\frac{dv}{dv} = \frac{M(u,v) - \theta\left(N'_u(u,v) + M'_v(u,v)\right)v}{N(u,v) - \theta\left(N'_u(u,v) + M'_v(u,v)\right)u}.$$
Следуя Н.П. Еругину [6, гл.1, §4], получаем решение однородного уравнения в параметрической форме
$$u(z) = CB^k(1,z), \quad v(z) = CzB^k(1,z).$$

Так как

$$\lim_{z\to\infty} u(z) = 0, \quad \lim_{z\to+\infty} v(z) = CN^k(0,1), \quad \lim_{z\to-\infty} v(z) = -CN^k(0,1),$$

то согласно [6, с. 44] начало координат системы (3) является центром. Доказана следующая теорема.

Теорема. *При выполнении условия* (1) *особая точка* $(0,0)$ *системы* (3) *является центром.*

В работе [4] получены необходимые и достаточные условия центра системы Дарбу, однако, для наличия в начале координат системы Дарбу центра наряду с условием (1) требуется также, чтобы начало координат системы (3) являлось центром. На основании доказанной выше теоремы условие 2) в теореме 5 из статьи [4] лишнее, так как оно выполняется при выполнении условия 1) теоремы 5 из статьи [4].

Найдем якобиан отображения (2) в точках $(x,y)\neq(0,0)$

$$\frac{D(u,v)}{D(x,y)} = \begin{vmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{vmatrix} = (B^k + kxB^{k-1}B'_x)(B^k + kyB^{k-1}B'_y) - k^2xyB^{2(k-1)}B'_yB'_x =$$

$$= B^{2k} + kB^{2k-1}(xB'_x + yB'_y) = B^{2k} + k(n+1)B^{2k} = 0.$$

Лемма 1. *Якобиан отображения* (2) *равен нулю во всех точках* $(x,y)\neq(0,0)$.

Докажем, что отображение (2) разрывно в точке $(0,0)$.

$$\lim_{y\to0} u(0,y) = \lim_{y\to0} 0 = 0.$$

$$\lim_{x\to+0} u(x,0) = \lim_{x\to+0} \frac{x}{(-xM(x,0))^{1/(n+1)}} = \frac{1}{(-M(1,0))^{1/(n+1)}} \neq 0.$$

Так как $\lim\limits_{y\to0} u(0,y) \neq \lim\limits_{x\to+0} u(x,0)$, то $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} u(x,y)$ не существует.

Лемма 2. *Точка* $(0,0)$ *есть точка разрыва отображения* (2).

Считая, что $u(0,0)=0$, выясним, существует ли у функции $u(x,y)$ частная производная по переменной x в точке $(0,0)$.

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,0) = \lim_{\Delta x\to0} \frac{u(\Delta x,0) - u(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to0} \frac{(-M(1,0))^k}{|\Delta x|} = \infty.$$

Лемма 3. *Функция* $u(x,y)$ *не имеет частной производной по переменной* x *в точке* $(0,0)$.

Литература

1. Матвеев Н. М. *Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений.* М.: Высшая школа, 1967.

2. Ильяшенко Ю. С. *Алгебраическая неразрешимость и почти алгебраическая разрешимость проблемы центр–фокус* // Функц. анализ и его прил. 1972. Т. 6. № 3. С. 30–37.

3. Żołądek H., Llibre J. *The Poincaré center problem* // Journal of Dynamical and Control Systems. 2008. Vol. 14. № 4. P. 505—535.

4. Маханек М. М. *Предельные циклы системы Дарбу* // Весцi АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. 1983. № 1. С. 6–11.

5. Горбузов В. Н., Самодуров А. А. *Уравнение Дарбу и его аналоги.* Гродно: ГрГУ, 1985.

6. Еругин Н. П. *Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений.* Минск: Наука и техника, 1979.