ТЕОРИЯ УСТОЙЧИВОСТИ И УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЕМ

МИНИМАКСНЫЕ ЗАДАЧИ В КЛАССЕ ДИСКРЕТНЫХ УПРАВЛЕНИЙ

В.В. Альсевич, П.А. Петрович

В классе дискретных управляющих воздействий рассматривается задача оптимального управления:

$$J(u) = \max_{y \in Y} \varphi(x(t^*), y) \to \min, \tag{1}$$

$$\dot{x} = f(x, u), \quad t \in T = [0, t^*], x(0) = x_0, \tag{2}$$

$$u(t) \in U, \quad t \in T. \tag{3}$$

Здесь: $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^r$, U – выпуклый компакт,

$$f(x, u) = f_0(x) + B(x)u, \tag{4}$$

y – некоторый параметр с областью задания Y , где Y – компакт из $\mathbb{R}^m$.

Управляющее воздействие $u(t)$, $t \in T$, называется дискретным (с периодом квантования $h > 0$), если

$$u(\tau) = u(t), \quad \tau \in [t, t+h[, \quad t \in T_h = \{0, h, 2h, ..., t^* - h\},$$

где $h = t^*/N$, N – натуральное число. Дискретные управляющие воздействия отличаются от кусочно-постоянных тем, что их точками разрыва могут быть только моменты множества T_h .

Дискретные управляющие воздействия естественны с прикладной точки зрения, поскольку при решении нетривиальных задач неизбежно использование вычислительных устройств дискретного действия.

Следует отметить, что до настоящего времени для различных критериев качества и систем управления, как обыкновенных, так и с запаздыванием, в классе дискретных управлений получены условия оптимальности в виде квазимаксимума для систем с произвольной функцией $f(x, u)$ и дискретного принципа максимума с функцией вида (4) (см., напр., [1-5]). Однако в указанных работах исследовались гладкие задачи управления. В предлагаемом сообщении приводится дискретный принцип максимума для минимаксного критерия качества (1). В классе кусочно-непрерывных управляющих воздействий условия оптимальности для задачи (1)-(3) с произвольной функцией $f(x, u)$ приведены в [6, 7].

Будем предполагать, что функции $f_0(x), B(x)$, $\varphi(x, y)$ непрерывно дифференцируемы по x .

Пусть $u^0(t)$, $t \in T$, – допустимое управление в задаче (1)-(4), $x^0(t)$, $t \in T$, – соответствующее решение системы (2). Обозначим $H(t, y) = H(x^0(t), \psi(t, y), u^0(t)) = \psi'(t, y) f(x^0(t), u^0(t))$. Здесь $\psi(t, y)$, $t \in T$, – решение сопряженной системы:

$$\dot{\psi}(t, y) = -\frac{\partial H(t, y)}{\partial x}, \quad t \in T, \tag{5}$$

$$\psi(t^*, y) = -\frac{\partial\varphi(x^0(t^*), y)}{\partial x}. \tag{6}$$

Введем множество

$$Y_0 = \{y \in Y : \varphi(x^0(t^*), y) = \max_{\overline{y}\in Y} \varphi(x^0(t^*), \overline{y})\}.$$

Очевидно, Y_0 – компакт.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема (дискретный принцип максимума). *Если* $u^0(t)$, $t \in T$, *– оптимальное управление в задаче* (1)-(4), *то вдоль него и соответствующих решений* $x^0(t)$, $t \in T$, *прямой системы* (2) *и* $\psi(t, y)$, $t \in T$, *сопряженной системы* (5), (6) *выполняется условие*

$$\min_{y\in Y_0} \int\limits_t^{t+h} H(x^0(s), \psi(s, y), u^0(t))ds = \max_{u\in U} \min_{y\in Y_0} \int\limits_t^{t+h} H(x^0(s), \psi(s, y), u)ds, \quad t \in T_h. \tag{7}$$

Заметим, что в силу вида (4) функции $f(x, u)$ условие (7) можно представить в следующей форме:

$$\max_{u\in U} \min_{y\in Y_0} \Big(\int\limits_t^{t+h} \psi^{'}(s, y)B(x^0(s))ds\Big)(u - u^0(t)) = 0, \quad t \in T_h. \tag{8}$$

Аналогичный результат получим и для системы с запаздыванием

$$\dot{x}(t) = f(x(t), z(t), u(t)), \quad t \in T = [0, t^*], \quad x(t) = \gamma(t), \quad t \in [-\alpha, 0], \tag{9}$$

в которой $z(t) = x(t-\alpha)$, $\alpha > 0$ – запаздывание, $\gamma(t), \quad t \in [-\alpha, 0]$, – заданная функция, $f(x, z, u) = f_0(x, z) + B(x, z)u$. Только в этом случае в условии (8) $B(x^0(s))$ примет вид $B(x^0(s), z^0(s))$, а функция $\psi(t, y)$, $t \in T$, является решением сопряженной системы

$$\dot{\psi}(t, y) = -\frac{\partial H(t, y)}{\partial x} - \delta_{[0,t^*-\alpha[}(t)\frac{\partial H(t + \alpha, y)}{\partial z}, \quad t \in T, \tag{10}$$

с граничным условием (6), где $\delta_\omega(t) = 1$, если $t \in \omega$, $\delta_\omega(t) = 0$, если $t \notin \omega$, $H(t, y) = H(x^0(t), z^0(t), \psi(t, y), u^0(t)) = \psi^{'}(t, y)f(x^0(t), z^0(t), u^0(t))$. В системе (9) запаздывание может быть переменным. В этом случае очень усложняется сопряженная система (10).

Отметим также, что в каждой из указанных задач сами траектории систем (2) или (9) могут зависеть от параметра y , т.е. $f = f(x, u, y)$, $x(0, y) = x_0(y)$ в системе (2), $f = f(x, z, u, y)$, $x(t, y) = \gamma(t, y), \quad t \in [-\alpha, 0]$ в системе (9). В этом случае необходимо потребовать непрерывность всех указанных функций и по параметру y .

Литература

1. Габасов Р., Кириллова Ф. М., Альсевич В. В., Калинин А. И., Крахотко В. В., Павленок Н. С. *Методы оптимизации.* Минск: Четыре четверти, 2011.

2. Габасов Р., Альсевич В.В., Русакова Д.В. *Оптимизация непрерывных динамических систем с запаздыванием в классе дискретных управляющих воздействий* // Междунар. конф. «Динамические системы: устойчивость, управление, оптимизация» к 95-летию со дня рожд. акад. Е.А. Барбашина: тез. докл. Междунар. конф. Минск, 1—5 окт. 2013 г. Мн.: БГУ. 2013. С. 103–105.

3. Альсевич В.В. *Оптимизация непрерывных систем в классе дискретных управляющих воздействий* // Устойчивость, управление, дифференциальные игры (SCDG2019): Матер. междунар. науч.

конф., посвящ. 95-летию со дня рожд. акад. Н.Н. Красовского (Екатеринбург, 16–20 сент. 2019 г.). Екатеринбург: ИММ УрО РАН. 2019. С. 28—31.

4. Альсевич В.В. *Условия оптимальности в задаче управления с функционалом, зависящим от промежуточных состояний системы, в классе дискретных управляющих воздействий* // Динамические системы, оптимальное управление и математическое моделирование: Матер. Междунар. симпозиума, посвященного 100-летию математического образования в Восточной Сибири и 80-летию со дня рождения профессора О.В. Васильева. Иркутск, 7–11 окт. 2019 г. Сб. трудов. Иркутск: Иркутский государственный университет. 2019. С. 195—198.

5. Альсевич В.В. *Условия оптимальности для задач оптимального управления в классе дискретных управляющих воздействий* // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. 2021. Т. 29. № 1–2. С. 10–16.

6. Альсевич В.В. *Задача терминального управления с недифференцируемым критерием качества* // Дифференц. и интегр. уравнения. Иркутск. 1973. Вып. 2. С. 81–87.

7. Альсевич В.В. *Необходимые условия оптимальности для минимаксных задач оптимизации* // Дифференц. уравнения. 1976. Т. 12. № 8. С. 1384–1391.

ОБ ОЦЕНКЕ ПОКАЗАТЕЛЯ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ АВТОНОМНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА

А.С. Баландин

Для автономных дифференциальных уравнений с последействием получено довольно много необходимых и достаточных признаков экспоненциальной устойчивости, и построены области экспоненциальной устойчивости в пространстве параметров исходного уравнения. Но во всех этих критериях задаётся только знак показателя экспоненты. В [1, 2] для различных уравнений запаздывающего типа найдены точные оценки показателя степени. В данной работе рассмотрим линейное автономное дифференциальное уравнений нейтрального типа

$$\begin{cases} \dot{x}(t) - \sum\limits_{j=1}^{J} a_j \dot{x}\left(t-h_j\right) = \int\limits_0^{v} x(t-s)\,dr(s), \quad t \in \mathbb{R}_+, \\ x(\xi)=\varphi(\xi), \quad \dot{x}(\xi)=\dot{\varphi}(\xi), \quad \xi<0, \end{cases} \tag{1}$$

где $J \in \mathbb{N}$, $a_j \in \mathbb{R}$, $h_j, v \in \mathbb{R}_+$, функция $r\colon [0,v] \to \mathbb{R}$ имеет ограниченную вариацию, $r(0)=0$. Интеграл понимается в смысле Римана — Стилтьеса.

Положим

$$\sigma(t) = \sum_{j=1}^{J} a_j \left(\tilde{S}_{h_j}\dot{\varphi}\right)(t) + \int\limits_t^{v} \left(\tilde{S}_\xi \varphi\right)(t)\,dr(\xi), \quad \left(\tilde{S}_h y\right)(t) = \begin{cases} 0, & t-h \geqslant 0, \\ y(t-h), & t-h<0. \end{cases}$$

Пусть $\mathcal{X}$ — произвольное нормированное пространство измеримых на множестве $[0,\tau]$ функций, $\tau = \max\{h_1,\ldots,h_J,v\}$.

Уравнение (1) назовём *экспоненциально устойчивым* если существуют такие $K,\gamma>0$, что при любом $\sigma \in \mathcal{X}$ и любом $x(0) \in \mathbb{R}$ решение уравнения (1) имеет оценку:

$$|x(t)| \leqslant K e^{-\gamma t}\left(|x(0)| + \|\sigma\|_{\mathcal{X}}\right), \quad t \in \mathbb{R}_+. \tag{2}$$

Через I обозначим единичный (тождественный) оператор, через S_h следующий оператор, действующий в пространстве непрерывных (кусочно-непрерывных, суммируемых) функций

$$(S_h y)(t) = \begin{cases} y(t-h), & t-h \geqslant 0, \\ 0, & t-h<0, \end{cases} \quad S = \sum_{j=1}^{J} a_j S_{h_j}, \quad (Ty)(t) = \int\limits_0^{v} \left(S_\xi y\right)(t)\,dr(\xi),$$