конф., посвящ. 95-летию со дня рожд. акад. Н.Н. Красовского (Екатеринбург, 16–20 сент. 2019 г.). Екатеринбург: ИММ УрО РАН. 2019. С. 28—31.

4. Альсевич В.В. *Условия оптимальности в задаче управления с функционалом, зависящим от промежуточных состояний системы, в классе дискретных управляющих воздействий* // Динамические системы, оптимальное управление и математическое моделирование: Матер. Междунар. симпозиума, посвященного 100-летию математического образования в Восточной Сибири и 80-летию со дня рождения профессора О.В. Васильева. Иркутск, 7–11 окт. 2019 г. Сб. трудов. Иркутск: Иркутский государственный университет. 2019. С. 195—198.

5. Альсевич В.В. *Условия оптимальности для задач оптимального управления в классе дискретных управляющих воздействий* // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. 2021. Т. 29. № 1–2. С. 10–16.

6. Альсевич В.В. *Задача терминального управления с недифференцируемым критерием качества* // Дифференц. и интегр. уравнения. Иркутск. 1973. Вып. 2. С. 81–87.

7. Альсевич В.В. *Необходимые условия оптимальности для минимаксных задач оптимизации* // Дифференц. уравнения. 1976. Т. 12. № 8. С. 1384–1391.

ОБ ОЦЕНКЕ ПОКАЗАТЕЛЯ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ АВТОНОМНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА

А.С. Баландин

Для автономных дифференциальных уравнений с последействием получено довольно много необходимых и достаточных признаков экспоненциальной устойчивости, и построены области экспоненциальной устойчивости в пространстве параметров исходного уравнения. Но во всех этих критериях задаётся только знак показателя экспоненты. В [1, 2] для различных уравнений запаздывающего типа найдены точные оценки показателя степени. В данной работе рассмотрим линейное автономное дифференциальное уравнений нейтрального типа

$$\begin{cases} \dot{x}(t) - \sum\limits_{j=1}^{J} a_j \dot{x}\left(t - h_j\right) = \int\limits_0^{v} x(t-s)\, dr(s), \quad t \in \mathbb{R}_+, \\ x(\xi) = \varphi(\xi), \quad \dot{x}(\xi) = \dot{\varphi}(\xi), \quad \xi < 0, \end{cases} \tag{1}$$

где $J \in \mathbb{N}$, $a_j \in \mathbb{R}$, $h_j, v \in \mathbb{R}_+$, функция $r\colon [0, v] \to \mathbb{R}$ имеет ограниченную вариацию, $r(0) = 0$. Интеграл понимается в смысле Римана — Стилтьеса.

Положим

$$\sigma(t) = \sum_{j=1}^{J} a_j \left(\tilde{S}_{h_j} \dot{\varphi}\right)(t) + \int\limits_t^{v} \left(\tilde{S}_{\xi} \varphi\right)(t)\, dr(\xi), \qquad \left(\tilde{S}_h y\right)(t) = \begin{cases} 0, & t - h \geqslant 0, \\ y(t-h), & t - h < 0. \end{cases}$$

Пусть $\mathcal{X}$ — произвольное нормированное пространство измеримых на множестве $[0, \tau]$ функций, $\tau = \max\{h_1, \ldots, h_J, v\}$.

Уравнение (1) назовём *экспоненциально устойчивым* если существуют такие $K, \gamma > 0$, что при любом $\sigma \in \mathcal{X}$ и любом $x(0) \in \mathbb{R}$ решение уравнения (1) имеет оценку:

$$|x(t)| \leqslant K e^{-\gamma t} \left(|x(0)| + \|\sigma\|_{\mathcal{X}}\right), \quad t \in \mathbb{R}_+. \tag{2}$$

Через I обозначим единичный (тождественный) оператор, через S_h следующий оператор, действующий в пространстве непрерывных (кусочно-непрерывных, суммируемых) функций

$$(S_h y)(t) = \begin{cases} y(t-h), & t - h \geqslant 0, \\ 0, & t - h < 0, \end{cases} \quad S = \sum_{j=1}^{J} a_j S_{h_j}, \quad (Ty)(t) = \int\limits_0^{v} \left(S_{\xi} y\right)(t)\, dr(\xi),$$

Уравнение (1) перепишем в виде

$$(I-S)\dot{x}(t) = (Tx)(t) + \sigma(t), \quad t \in \mathbb{R}_+. \tag{3}$$

Решением уравнения (3) назовём абсолютно непрерывную на каждом конечном отрезке функцию $x\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, удовлетворяющую (3) почти всюду на $\mathbb{R}_+$.

Как известно (см. [3, с. 84, теорема 1.1], [4]), уравнение (3) с заданным начальным условием $x(0) \in \mathbb{R}$ однозначно разрешимо и его решение представимо в виде

$$x(t) = X(t)x(0) + \int\limits_0^\tau Y(t-s)\sigma(s)\,ds, \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{4}$$

где $X\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ называется *фундаментальным решением*, $Y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — *функцией Коши* уравнения (3). Функции X и Y доопределим нулём на отрицательной полуоси.

Из формулы формулы (4) следует, что различные свойства (асимптотическое поведение, положительность и т.п.) решений уравнения (3) определяются фундаментальным решением и функцией Коши уравнения (3).

Функция X определяется как решение однородного уравнения вида (3)

$$\dot{x}(t) - (S\dot{x})(t) = (Tx)(t), \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

дополненного начальным условием $x(0) = 1$.

Функция Y, в отличие от фундаментального решения, не может быть решением дифференциального уравнения. Однако в работе [4] установлена связь между X и Y:

$$X(t) = (I-S)Y(t). \tag{5}$$

Для X и Y рассмотрим следующие оценки:

$$|Y(t)| \leqslant M_1 e^{-\gamma t}, \tag{6}$$

$$|X(t)| \leqslant M_2 e^{-\gamma t}, \quad M_1, M_2, \gamma > 0. \tag{7}$$

Очевидно, что в силу равенства (5) из оценки (6) вытекает оценка (7).

Пусть

$$\alpha = \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\ln|Y(t)|}{t} < \infty.$$

Будем называть число α (строгим) верхним показателем функции Y.

Обозначим через Γ множество чисел $\gamma \in \mathbb{R}$, для которых справедлива оценка (6). Назовём число $\omega \triangleq \sup\{\gamma\colon \gamma \in \Gamma\}$ *точным показателем* функции Коши.

Теорема 1. *Если для функции Коши уравнения* (3) *справедлива оценка* (6) *с показателем экспоненты* $\gamma > 0$, *то для любого решения уравнения* (3) *выполняется оценка* (2).

Теорема 2. *Точный показатель функции Коши уравнения* (3) *равен* ω *тогда и только тогда, когда верхний показатель функции Коши уравнения*

$$\dot{y}(t) - \sum_{j=1}^{J} a_j e^{\omega h_j} \dot{y}(t-h_j) = \omega y(t) - \sum_{j=1}^{J} a_j \omega e^{\omega h_j} y(t-h_j) + \int\limits_0^{v} e^{\omega s} y(t-s)\,dr(s), \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

равен нулю.

Теорема 2 предлагает схему для нахождения точного показателя уравнения (3). В [5] изучается точный показатель решения для двух уравнений нейтрального типа.

Исследования выполнены при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект № FSNM-2023-0005).

Литература

1. Malygina V. V. *On sharp estimation of the exponent of solutions to some classes of functional differential equations* // Mem. Differential Equations Math. Phys. 2022. V. 87. P. 99–110.

2. Sabatulina T., Balandin A. *On the exact estimation for the exponent of solutions of one equation with distributed delay* // Mem. Differential Equations Math. Phys. 2022. V. 87. P. 153–163.

3. Азбелев Н. В., Максимов В. П., Рахматуллина Л. Ф. *Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений.* М.: Наука, 1991.

4. Баландин А. С. *О связи между фундаментальным решением и функцией Коши для функционально-дифференциальных уравнений нейтрального типа* // Прикладная математика и вопросы управления. 2018. № 1. С. 13–25.

5. Баландин А. С. *О точной оценке показателя решений линейного автономного дифференциального уравнения нейтрального типа* // Вторая конференция математических центров России, 7-11 ноября 2022 г. Москва : Изд-во Моск. ун-та. 2022. С. 27–29.

ОБ ОДНОЙ ФОРМУЛЕ ДЛЯ КРАТНОСТЕЙ ЭЛЕМЕНТОВ МАКСИМАЛЬНО ИНВАРИАНТНОГО МНОЖЕСТВА СПЕКТРА ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

В.И. Булатов

Рассмотрим стационарную систему

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \tag{1}$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n, u(t) \in \mathbb{R}^r, t \in [0, +\infty[, A$ и B - соответственно $n \times n$ и $n \times r$ матрицы.

Замыкание системы (1) регулятором типа линейной обратной связи

$$u(t) = Qx(t), \tag{2}$$

где $Q - r \times n -$ матрица, приводит к системе

$$\dot{x}(t) = (A + BQ)x(t), \tag{3}$$

спектром которой является множество Λ корней (с учетом их кратностей) характеристической функции

$$\delta(\lambda) = \det(\lambda E - A - BQ). \tag{4}$$

Из $[1]-[3]$ следует, что, во-первых, для любого регулятора (2) многочлен (4) делится без остатка на многочлен $\varphi(\lambda)$, являющийся наибольшим общим делителем миноров $n-$ го порядка $\lambda-$ матрицы $P(\lambda) = [\lambda E - A; B]$, и, во-вторых, среди всех таких делителей многочлена $\delta(\lambda)$ рассматриваемый многочлен $\varphi(\lambda)$ имеет наибольшую степень. Корни (с учетом их кратностей) многочлена $\varphi(\lambda)$ составляют максимально инвариантное множество M спектров Λ систем (3).

Справедлива следующая

Теорема. *Кратность* l *числа* $\lambda_0 \in M$ *равна дефекту* [3] *матрицы* $G = [H; (\lambda_0 E - A)^n]$, *т.е.*

$$l = n - rankG,$$

где $H = [B; AB; \ldots; A^{n-1}B]$.