Литература

1. Булатов В. И.*Влияние обратной связи на спектр линейной системы* // Вестник БГУ. Сер.1. 1977. С. 81-82.

2. Булатов В. И. *Задачи модального управления* // Автореферат дисс. на соискание ученой степени канд.физ.-мат. наук. Мн. 1981.

3. Гантмахер Ф. Р.*Теория матриц* // М.: 1988.

ПОСТРОЕНИЕ МНОЖЕСТВА УПРАВЛЯЕМОСТИ ДЛЯ ОДНОЙ ЗАДАЧИ БЫСТРОДЕЙСТВИЯ С НАРУШЕНИЕМ УСЛОВИЯ ОБЩНОСТИ ПОЛОЖЕНИЯ

М.Н. Гончарова

Рассмотрим управляемый объект, поведение которого описывается системой уравнений второго порядка

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= \lambda_1 x_1 + v_1, \\ \dot{x}_2 &= \lambda_2 x_2 + v_2, \end{cases} \tag{1}$$

где управление $(v_1; v_2)$ является векторной кусочно-непрерывной функцией, принимающей значения из четырехугольника V. Множество векторных кусочно-непрерывных функций, принимающих значения из компакта V обозначим через U.

Множество всех точек фазового пространства, в которых объект (1) находится в момент времени t, в момент времени t_1 попадает в начало координат O с помощью некоторого управления из множества U, называется множеством управляемости объекта (1) в начало координат. Это множество обозначим через $Y(t, t_1, \{O\}, U, R^2)$. Момент времени t_1 считаем фиксированным. Рассмотрим задачу построения множества управляемости $Y(t, t_1, \{O\}, U, R^2)$ для произвольного момента времени t.

Будем считать, что выполняются неравенства $0 < \lambda_1 < \lambda_2$. Вершины четырехугольника V обозначим через $C_i, i = \overline{1, 4}$, обходя контур четырехугольника против часовой стрелки. Координаты вершины C_i обозначим через C_{i1}, C_{i2}. Примем, что выполняются следующие соотношения:

$$C_{11} > 0, C_{12} > 0, C_{21} < 0, C_{22} > C_{12}, C_{31} < C_{21},$$
$$C_{32} < 0, C_{41} > 0, C_{42} = C_{32}, C_{41} < C_{11}.$$

Замечание 1. В сделанных предположениях начало координат принадлежит множеству V, но не является его вершиной. Три стороны четырехугольника V не параллельны осям координат, но сторона, соединяющая вершины C_3 и C_4, параллельна оси Ox_1. Поэтому условие общности положения не выполнено.

Теорема. *Множество* $Y(t, t_1, \{O\}, U, R^2)$ *ограничено линиями*

$$\begin{aligned} x_1(\eta) &= \tfrac{C_{31}}{\lambda_1} e^{-\lambda_1 \tau} + \tfrac{C_{41} - C_{31}}{\lambda_1} e^{\lambda_1(\eta - \tau)} - \tfrac{C_{41}}{\lambda_1}, \\ x_2(\eta) &= \tfrac{C_{32}}{\lambda_2} e^{-\lambda_2 \tau} - \tfrac{C_{42}}{\lambda_2}, \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} x_1(\eta) &= \tfrac{C_{11}}{\lambda_1} e^{-\lambda_1 \tau} + \tfrac{C_{41} - C_{11}}{\lambda_1} e^{\lambda_1(\eta - \tau)} - \tfrac{C_{41}}{\lambda_1}, \\ x_2(\eta) &= \tfrac{C_{12}}{\lambda_2} e^{-\lambda_2 \tau} + \tfrac{C_{42} - C_{12}}{\lambda_2} e^{\lambda_2(\eta - \tau)} - \tfrac{C_{42}}{\lambda_2}, \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} x_1(\eta) &= \tfrac{C_{11}}{\lambda_1} e^{-\lambda_1 \tau} + \tfrac{C_{21} - C_{11}}{\lambda_1} e^{\lambda_1(\eta - \tau)} - \tfrac{C_{21}}{\lambda_1}, \\ x_2(\eta) &= \tfrac{C_{12}}{\lambda_2} e^{-\lambda_2 \tau} + \tfrac{C_{22} - C_{12}}{\lambda_2} e^{\lambda_2(\eta - \tau)} - \tfrac{C_{22}}{\lambda_2}, \end{aligned} \tag{4}$$

$$
\begin{aligned}
x_1(\eta) &= \tfrac{C_{31}}{\lambda_1}e^{-\lambda_1\tau} + \tfrac{C_{21}-C_{31}}{\lambda_1}e^{\lambda_1(\eta-\tau)} - \tfrac{C_{21}}{\lambda_1},\\
x_2(\eta) &= \tfrac{C_{32}}{\lambda_2}e^{-\lambda_2\tau} + \tfrac{C_{22}-C_{32}}{\lambda_2}e^{\lambda_2(\eta-\tau)} - \tfrac{C_{22}}{\lambda_2},
\end{aligned}
\tag{5}
$$

где $\tau = t_1 - t,$ *параметр* $\eta \in [0;\tau]$.

Доказательство теоремы основано на процедуре восстановления выпуклого множества управляемости по его опорной функции. Известно [1], что опорная функция множества $Y(t,t_1,\{O\},U,R^2)$ в направлении вектора ψ определяется равенством

$$
c(Y(t,t_1,\{O\},U,R^2),\psi) = \int\limits_t^{t_1} c(V, e^{(t-s)A^*}(-\psi))ds,
$$

где через A^* обозначена матрица, транспонированная к матрице A, матрица A составлена из коэффициентов при фазовых переменных системы, описывающей поведение объекта. Заметим что, в силу нарушения условия общности положения для некоторых векторов ψ опорное множество множества V состоит более, чем из одной точки.

Рассмотрим вспомогательную задачу оптимального быстродействия, в которой поведение объекта снова описывается системой (1), а область управления является четырехугольником $\tilde V$ с вершинами $C_i, i = 1,2,4, \tilde C_3 = (\tilde C_{31};\tilde C_{32})$, где координаты вершин $C_i, i = 1,2,4$, совпадают с координатами вершин четырехугольника V, координаты $\tilde C_{31}, \tilde C_{32}$ определяются равенствами $\tilde C_{31} = C_{31} + \epsilon\frac{C_{31}-C_{21}}{C_{32}-C_{22}}$, $\tilde C_{32} = C_{32} + \epsilon$, где $0 < \epsilon < |C_{32}|$. При таком построении множества $\tilde V$ вершина $\tilde C_3$ принадлежит ребру четырехугольника V, соединяющему вершины C_2 и C_3. Множество векторных кусочно-непрерывных функций, принимающих значения из компакта $\tilde V$ обозначим через $\tilde U$.

Очевидно, что в задаче быстродействия для объекта (1) с областью управления $\tilde V$ условие общности положения будет выполненным.

Проведя вычисление интеграла $\int\limits_t^{t_1} c(\tilde V, e^{(t-s)A^*}(-\psi))ds$ для восьми различных случаев, получаем опорную функцию $c(Y(t,t_1,\{O\},\tilde U,R^2),\psi)$. Восстанавливая выпуклое множество по его опорной функции, получим, что множество $Y(t,t_1,\{O\},\tilde U,R^2)$ ограничено линией

$$
\begin{aligned}
x_1(\eta) &= \left(\tfrac{C_{31}}{\lambda_1} + \tfrac{\epsilon}{\lambda_1}\tfrac{C_{31}-C_{21}}{C_{32}-C_{22}}\right)e^{-\lambda_1\tau} + \left(\tfrac{C_{41}-C_{31}}{\lambda_1} - \tfrac{\epsilon}{\lambda_1}\tfrac{C_{31}-C_{21}}{C_{32}-C_{22}}\right)e^{\lambda_1(\eta-\tau)} - \tfrac{C_{41}}{\lambda_1},\\
x_2(\eta) &= \tfrac{C_{32}+\epsilon}{\lambda_2}e^{-\lambda_2\tau} + \tfrac{C_{42}-C_{32}-\epsilon}{\lambda_2}e^{\lambda_2(\eta-\tau)} - \tfrac{C_{42}}{\lambda_2},
\end{aligned}
\tag{6}
$$

где $\eta \in [0;\tau]$ и линиями (3)-(5). Переходя в уравнениях (6) к пределу при $\epsilon \to 0$, получаем утверждение теоремы.

Замечание 2. Линия (2) параллельна оси Ox_1.

Полученный результат можно использовать при построении множества управляемости рассматриваемого объекта в произвольную точку фазового пространства, а также в процессе построения множества управляемости при наличии фазовых ограничений.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования Республики Беларусь (ГПНИ "Конвергенция-2025", задание 1.2.04).

Литература

1. Киселев Ю. Н., Аввакумов С. Н., Орлов М. В. *Оптимальное управление. Линейная теория и приложения* // М.: МАКС Пресс, 2007.