ОПТИМАЛЬНОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ ВЫПУСКОВ ТОВАРОВ ДЛИТЕЛЬНОГО ПОЛЬЗОВАНИЯ

Н.М. Дмитрук, М.М. Вабищевич

В докладе исследуется задача фирмы, которая планирует выпуск товаров длительного пользования, замену старых версий новыми и выбирает оптимальную цену каждого поколения товара. Постановка задачи следует работе [1], где она решается численно, а качественный анализ проведен только для магистралей в задаче выпуска одного поколения. Самое интересное, однако, происходит на начальных этапах функционирования фирмы, поэтому цель настоящего сообщения — обосновать решение на основе принципа максимума [2].

Задача фирмы формулируется как задача оптимального управления, в которой переменными состояния выступают объем рынка потенциальных покупателей $Q(t)$ и капитал $K(t)$, а управлениями — объем продаж $q(t)$ и инвестиции $I(t)$ в момент времени t, $t \geq 0$. В момент $t = 0$ заданы начальные объемы рынка Q_0 и капитала K_0. Предполагается, что каждый покупатель приобретает одну единицу товара длительного пользования и покидает рынок. Тогда динамическая модель имеет вид

$$\dot{Q}(t) = -q(t), \quad Q(0) = Q_0, \quad \dot{K}(t) = I(t) - \delta K(t), \; K(0) = K_0, \tag{1}$$

где $\delta \in (0, 1)$ — норма амортизации.

Ограничения учитывают, что все переменные должны быть неотрицательными: $Q(t) \geq 0$, $K(t) \geq 0$, $q(t) \geq 0$, $I(t) \geq 0$, $t \geq 0$. Кроме того, вводятся смешанные ограничения

$$q(t) \leq K(t), \quad q(t) \leq \alpha Q(t) - \varphi p(t), \quad t \geq 0, \tag{2}$$

которые означают, что продажи не могут превышать производственные мощности, т.е. $K(t)$, а также спрос со стороны покупателей, который выражается функцией $d(Q, p) = \alpha Q - \varphi p$, где $p > 0$ — цена товара, а параметры $\alpha, \varphi > 0$ — параметры функции спроса.

Задача фирмы состоит в определении программы продаж $q(t)$, $t \geq 0$, и инвестиций $I(t)$, $t \geq 0$, а также цены p, при которых общая дисконтированная прибыль фирмы

$$\max_{p,q,I} \int_0^\infty e^{-rt} \left[(p - c) q(t) - I(t) - \frac{\theta}{2} I(t)^2 \right] dt \tag{3}$$

будет максимальной. Здесь $r > 0$ — норма дисконтирования, $c > 0$ — затраты на производство единицы продукции, $I + \theta I^2/2$ — квадратичная функция капитальных издержек.

Задача (1) – (3) — базовая задача фирмы, в которой выпускается только одно поколение товара. Ее решение строится в два этапа. Сначала фиксируется цена товара p, тогда задача (1) – (3) становится линейно-квадратичной, с вогнутой функцией в критерии качества. Для ее решения применяются достаточные условия оптимальности в форме принципа максимума из работы [3]. Было установлено, что оптимальное решение состоит из трех участков (дуг): на первом участке капитал растет за счет инвестиций, продажи равны выпуску продукции ($q = K$); на втором — инвестиции прекращаются ($I = 0$), капитал начинает уменьшаться, но продажи по-прежнему равны выпуску ($q = K$), на третьем — инвестиций нет, продажи равны спросу ($q = d(Q, p)$). При этом установлено, что переход с дуги 2 на дугу 3 происходит в момент t_d, когда $K(t_d) = \alpha Q(t_d) - \varphi p$. Переход с дуги 1 на дугу 2 определяется условиями, связанными с сопряженными переменными. Если $V(p, Q_0, K_0)$ — оптимальное значение задачи при фиксированных цене и начальных условиях Q_0, K_0, то решение задачи максимизации функции одной переменной $V(Q_0, K_0) = \max_{p>0} V(p, Q_0, K_0)$, на втором этапе дает решение задачи (1) – (3). На рис. 1 представлены результаты для следующих значений параметров $r = 0.01$, $\alpha = 1$, $c = 20$, $\varphi = 10$, $\delta = 0.05$, $\theta = 1$, $Q_0 = 1000$, $K_0 = 0$.

Далее исследуется случай, когда фирма планирует выпустить $N + 1$, $N > 1$, поколение товара. Фирма выбирает моменты внедрения T_i и цену p_i каждого нового поколения товара оптимальным образом, $i = \overline{1, N}$. На промежутке времени $[T_{i-1}, T_i]$ фирма выпускает i-ое поколение ($T_0 = 0$), на промежутке $[T_N, +\infty)$ выпускается последнее, $(N+1)$-ое поколение товара, его цена равна p_{N+1}. Затраты на запуск $(i+1)$-го поколения обозначаются S_i. Они отражают исследовательские, маркетинговые издержки по разработке и выпуску новой версии. Когда фирма выводит на рынок новую версию товара, количество потенциальных покупателей резко возрастает: $Q(T_i) = Q_i > Q(T_i - 0)$. В то же время производственные мощности, которые использовались для выпуска предыдущего поколения, могут использоваться лишь частично: $K(T_i) = \beta K(T_i - 0)$, $i = \overline{1, N}$, где β — доля сохраняемого капитала.

В силу сделанных предположений рассматриваемая задача имеет вид

$$\max_{T,p,q,I} \left\{ \left(\sum_{i=1}^{N} \int\limits_{T_{i-1}}^{T_i} e^{-rt} \left[(p_i - c)q(t) - I(t) - \frac{\theta}{2} I(t)^2 \right] dt - e^{-rT_i} S_i \right) + e^{-rT_N} V(Q_N, K_N) \right\}, \tag{4}$$

$$\dot{Q}(t) = -q(t), \quad \dot{K}(t) = I(t) - \delta K(t), \quad Q(T_{i-1}) = Q_{i-1}, \quad K(T_{i-1}) = K_{i-1}, \quad K_i = \beta K(T_i - 0),$$
$$0 \le q(t) \le K(t), \quad q(t) \le \alpha Q(t) - \varphi p(t), \quad I(t) \ge 0, \quad t \in [T_{i-1}, T_i[, \quad i = \overline{1, N}.$$

Для решения задачи (4) используются результаты решения базовой задачи (1) – (3), рассуждения динамического программирования и оптимизация по моментам времени T_i. На рис. 2 представлены результаты решения для 3 поколений товара для данных приведенных выше и, дополнительно при $\beta = 0.5$, $Q_i = 1.1 Q_{i-1}$, $S_i = 5000$, $i = 1, 2$.

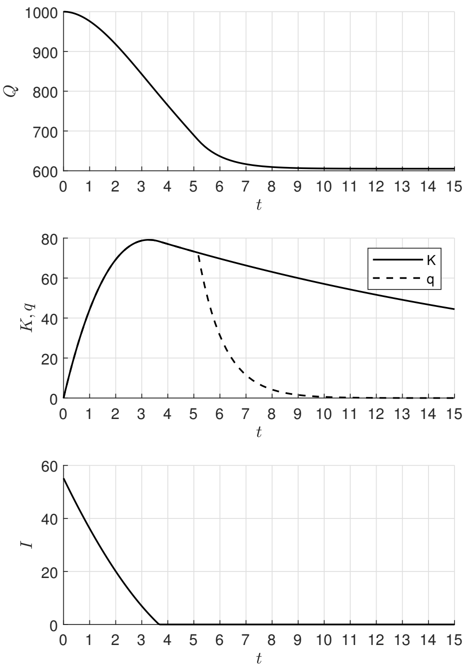

Рис. 1. Решение задачи (1) – (3)

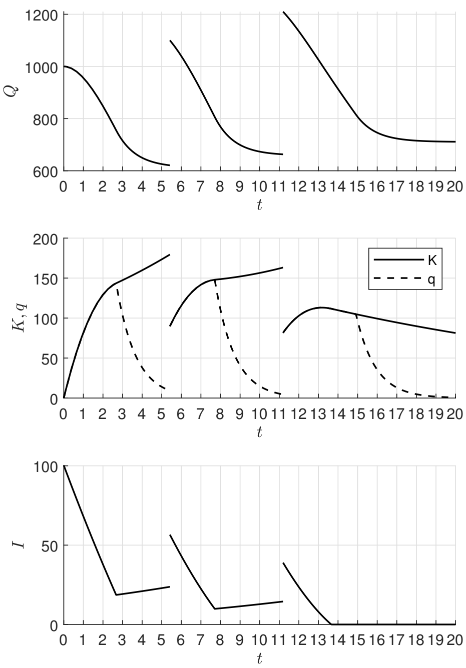

Рис. 2. Решение задачи (4)

Литература

1. Seidl A., Hartl R. F., Kort P. M. *A multi-stage optimal control approach of durable goods pricing and the launch of new product generations* // Automatica. 2019. Vol. 106. P. 207–220.

2. Болтянский В. Г. *Математические методы оптимального управления.* М.: Наука, 1966.

3. Габасов Р., Габасова О. Р., Дмитрук Н. М. *Синтез оптимальной политики для производственно-финансовой модели фирмы* // Автоматика и телемеханика. 1998. № 9. С. 100–117.

МИНИМИЗАЦИЯ КВАДРАТИЧНОГО ФУНКЦИОНАЛА В НЕСТАЦИОНАРНЫХ ДИСКРЕТНЫХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ ВОЛЬТЕРРА

М.П.Дымков, В.В.Горячкин

Особый интерес привлекают дискретные системы с последействием, существенной особенностью которых является зависимость состояний системы от предыстории процесса [1, 2]. Среди таких систем особое место занимают системы уравнений Вольтерра, у которых состояние в каждый момент времени зависит от всей предыстории процесса. Рассмотрим систему уравнений вида

$$x(t+1) = \sum_{j=0}^{t} A_j(t)x(t-j) + B(t)u(t), \quad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n, \quad t = 0, 1, ..., N-1. \tag{1}$$

Здесь $A_j(t)$ и $B(t)$ заданные $(n \times n)$ и $(n \times m)$ вещественные матрицы, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ $-n-$ вектор состояния, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ $-m-$ вектор управления в момент t. Требуется на решениях системы управления (1) минимизировать функционал качества вида

$$J(u) = \sum_{t=1}^{N} [(Q(t)x(t), x(t)) + (R(t-1)u(t-1), u(t-1))] \to \min_{u(\cdot)}, \tag{2}$$