

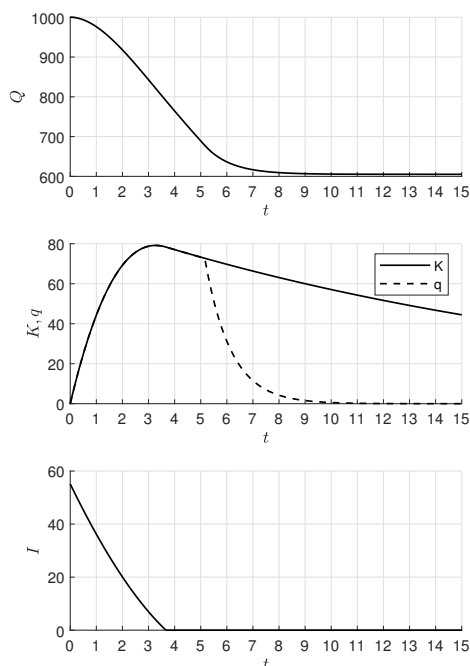


Рис. 1. Решение задачи (1) – (3)

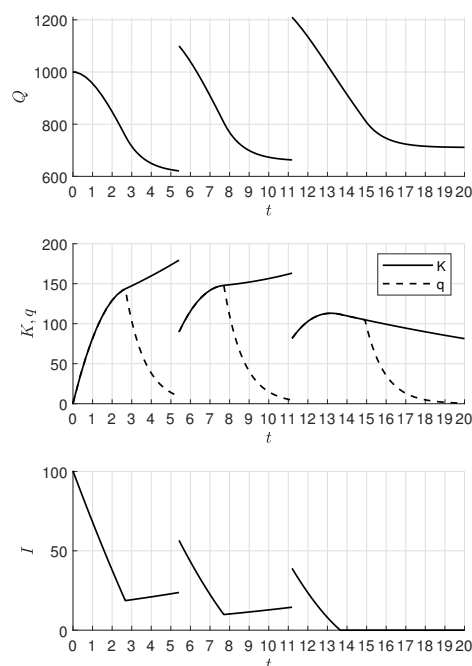


Рис. 2. Решение задачи (4)

Литература

1. Seidl A., Hartl R. F., Kort P. M. *A multi-stage optimal control approach of durable goods pricing and the launch of new product generations* // Automatica. 2019. Vol. 106. P. 207–220.
2. Болтянский В. Г. *Математические методы оптимального управления*. М.: Наука, 1966.
3. Габасов Р., Габасова О. Р., Дмитрук Н. М. *Синтез оптимальной политики для производственно-финансовой модели фирмы* // Автоматика и телемеханика. 1998. № 9. С. 100–117.

МИНИМИЗАЦИЯ КВАДРАТИЧНОГО ФУНКЦИОНАЛА В НЕСТАЦИОНАРНЫХ ДИСКРЕТНЫХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ ВОЛЬТЕРРА

М.П.Дымков, В.В.Горячкин

Особый интерес привлекают дискретные системы с последствием, существенной особенностью которых является зависимость состояний системы от предыстории процесса [1, 2]. Среди таких систем особое место занимают системы уравнений Вольтерра, у которых состояние в каждый момент времени зависит от всей предыстории процесса. Рассмотрим систему уравнений вида

$$x(t+1) = \sum_{j=0}^t A_j(t)x(t-j) + B(t)u(t), \quad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n, \quad t = 0, 1, \dots, N-1. \quad (1)$$

Здесь $A_j(t)$ и $B(t)$ заданные $(n \times n)$ и $(n \times m)$ вещественные матрицы, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ – n –вектор состояния, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ – m –вектор управления в момент t . Требуется на решениях системы управления (1) минимизировать функционал качества вида

$$J(u) = \sum_{t=1}^N [(Q(t)x(t), x(t)) + (R(t-1)u(t-1), u(t-1))] \rightarrow \min_{u(\cdot)}, \quad (2)$$

где $Q(t), R(t), t = 0, 1, \dots, N$ заданные симметрические неотрицательно определенные $(n \times n)$ и положительно определенные невырожденные $(m \times m)$ матрицы, соответственно.

Определение 1. Функцию $u(t), t = 1, \dots, N-1$ будем называть допустимым управлением, если $u = (u(0), u(1), \dots, u(N-1)) \in \mathbb{R}^{mN}$. Решением системы уравнений (1) при заданном допустимом управлении $u(t), t = 0, 1, \dots, N-1$ назовем функцию $x(t), t = 1, \dots, N$, которая удовлетворяет условию $x = (x(1), \dots, x(N)) \in \mathbb{R}^{nN}$ и системе уравнений (1) при всех $t = 0, 1, \dots, N-1$.

Лемма 1. Решение $x = x(t, u, x_0), t = 1, \dots, N$ системы уравнений (1) при заданных начальном условии x_0 и допустимом управлении $u(t), t = 0, 1, \dots, N-1$ представимо в виде

$$x(t) = F_0(t)x_0 + \sum_{j=0}^{t-1} F_{j+1}(t)B(j)u(j), \quad t = 1, 2, \dots, N, \quad (3)$$

где $(n \times n)$ матрицы $F_j(t)$ удовлетворяют следующим рекуррентным соотношениям

$$F_j(t) = \sum_{k=j}^{t-1} F_{k+1}(t)A_{k-j}(k), \quad F_j(j) = E, \quad j = 0, 1, \dots, t, \quad t = 1, 2, \dots, N,$$

где E – единичная $(n \times n)$ матрица.

Для исследования задач оптимизации в линейных дискретных системах управления, определенных на целочисленной решетке Z_+ , оказалось удобным [3,4] их операторное представление в соответствующих гильбертовых пространствах последовательностей. Этот прием будем использовать и для решения задачи (1) – (2).

Определим оператор $L : \mathbb{R}^{mN} \rightarrow \mathbb{R}^{n(N+1)}$ формулой

$$(Lu)(t) = \sum_{j=0}^{t-1} F_{j+1}(t)B(j)u(j), \quad (Lu)(0) = 0, \quad t = 0, 1, \dots, N. \quad (4)$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. Задача оптимизации (1)-(2) имеет единственное решение, которое представимо в виде

$$u^0 = -(\mathcal{R} + L^*QL)^{-1}L^*Q\omega \quad (5)$$

где $L^* : \mathbb{R}^{n(N+1)} \rightarrow \mathbb{R}^{mN}$ оператор сопряженный к оператору L , $\omega = (F_0(0)x_0, F_0(1)x_0, \dots, F_0(N)x_0)$, а операторы $\mathcal{R} : \mathbb{R}^{mN} \rightarrow \mathbb{R}^{mN}$ $Q : \mathbb{R}^{nN} \rightarrow \mathbb{R}^{nN}$ определяются формулами

$$(\mathcal{R}u)(t) = R(t)u(t), \quad (Qx)(t) = Q(t)x(t), \quad t = 1, \dots, N.$$

Полученное в теореме 1 выражение оптимального управления имеет операторный вид, что создает определенные трудности. По этой причине становится актуальной задача поиска более приемлемых форм представления оптимального решения.

Определим оператор $V : \mathbb{R}^{nN} \rightarrow \mathbb{R}^{nN}$ формулой

$$(V\varphi)(t) = \sum_{j=0}^t A_j(t)\varphi(t-j), \quad t = 1, \dots, N, \quad \varphi = (\varphi(1), \dots, \varphi(N)) \in \mathbb{R}^{nN}.$$

Можно показать, что сопряженный оператор $V^* : \mathbb{R}^{nN} \rightarrow \mathbb{R}^{nN}$ задается формулой

$$(V^*\psi)(t) = \sum_{k=0}^{N-t} A_k^T(t+k)\psi(t+k), \quad t = 1, \dots, N, \quad \psi = (\psi(1), \dots, \psi(N)) \in \mathbb{R}^{nN},$$

где $A_k^T(t)$ обозначает матрицу транспонированную с матрицей $A_k(t)$.

В соответствии с представлением сопряженного оператора V^* рассмотрим следующую систему уравнений

$$z(t-1) = \sum_{k=0}^{N-t} A_k^T(t) z(t+k) + g(t), \quad t = N, N-1, \dots, 1 \quad z(N) = 0, \quad (6)$$

которую будем называть сопряженной с исходной системой (1). Для представления решений сопряженной системы (6) введем $(n \times n)$ -матрицы $G_j(t)$, $t = N, N-1, \dots, 1$; $j = 0, 1, \dots, t$ следующими рекуррентными формулами

$$G_{j+1}(t-1) = \sum_{k=0}^{N-t} A_k^T(t-1+k) G_{j-k}(t+k), \quad t = N, N-1, \dots, 1, \quad G_0(t) = E, \quad G_s(t) = \emptyset, s < 0,$$

где $E, \emptyset$ — $(n \times n)$ -единичная и нулевая, соответственно, матрицы.

В работе исследуется вопрос представления оптимального управления в виде функции переменных сопряженной системы.

Работа выполнена при финансовой поддержке ГПНИ "Конвергенция - 2025".

Литература

1. Гайшун И. В., Дымков М. П. *Управляемость систем, описываемых линейными дискретными уравнениями Вольтерра* // Автоматика и телемеханика. 2000. № 7, С. 88-100.
2. Kolmanovskii V. B., Castellanos-Velasco E. *Asymptotic properties of the solutions for some discrete Volterra equations* // Dynamic Systems and Applications. 2005. vol. 14(2). P.197-224.
3. Dymkov M., Gaishun I., Rogers E., Galkowski K., Owens D.H. *A Volterra operator based observability theory for discrete linear repetitive processes* // Proceedings of VI -th International Conference on Control, Automation, Robotics and Vision (ICARCV). Singapore, 8 pages. 2000.
4. Дымков М. П. *Экстремальные задачи в многопараметрических системах управления*. Минск: БГЭУ, 2005.

КОНСТРУКЦИЯ ФУНКЦИОНАЛА ПОЛНОГО ТИПА ДЛЯ ОДНОРОДНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ СИСТЕМ С ЛИНЕЙНО ВОЗРАСТАЮЩИМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

А.П. Жабко, В.С. Жигалов

Введение. В настоящее время не ослабевает актуальность исследования математических моделей, описываемых дифференциально-разностными уравнениями с линейно возрастающим запаздыванием. К таким моделям относятся, в частности, динамика автомобильного потока на КАД, модель информационного сервера, распространение эпидемии и др. В работе [1] рассматривалась стабилизация линейной системы с линейным пропорциональным запаздыванием. В настоящей работе изучается асимптотическая устойчивость нулевого решения неуправляемой системы дифференциально-разностных уравнений с линейно возрастающим запаздыванием.

Рассмотрим систему уравнений с однородными правыми частями

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) + g(x(\alpha t)), \quad 0 < \alpha < 1, \quad (1)$$