где $A_k^T(t)$ обозначает матрицу транспонированную с матрицей $A_k(t)$.

В соответствии с представлением сопряженного оператора $V^*$ рассмотрим следующую систему уравнений

$$z(t-1)=\sum_{k=0}^{N-t}A_k^T(t)z(t+k)+g(t),\quad t=N,N-1,...,1\quad z(N)=0, \tag{6}$$

которую будем называть сопряженной с исходной системой (1). Для представления решений сопряженной системы (6) введем $(n \times n)-$ матрицы $G_j(t)$, $t=N,N-1,...,1;$ $j=0,1,...,t$ следующими рекуррентными формулами

$$G_{j+1}(t-1)=\sum_{k=0}^{N-t}A_k^T(t-1+k)G_{j-k}(t+k),\ t=N,N-1,...,1,\ G_0(t)=E,\ G_s(t)=\emptyset, s<0,$$

где $E,\emptyset-$ $(n\times n)$ - единичная и нулевая, соответственно, матрицы.

В работе исследуется вопрос представления оптимального управления в виде функции переменных сопряженной системы.

Работа выполнена при финансовой поддержке ГПНИ "Конвергенция - 2025".

**Литература**

1. Гайшун И. В., Дымков М. П. *Управляемость систем, описываемых линейными дискретными уравнениями Вольтерра* // Автоматика и телемеханика. 2000. № 7, С. 88-100.

2. Kolmanovskii V. B., Castellanos-Velasco E. *Asymptotic properties of the solutions for some discrete Volterra equations* // Dynamic Systems and Applications. 2005. vol. 14(2). P.197-224.

3. Dymkov M., Gaishun I., Rogers E., Galkowski K., Owens D.H. *A Volterra operator based observability theory for discrete linear repetitive processes* // Proceedings of VI -th International Conference on Control, Automation, Robotics and Vision (ICARCV). Singapure, 8 pages. 2000.

4. Дымков М. П. *Экстремальные задачи в многопараметрических системах управления.* Минск: БГЭУ, 2005.

# КОНСТРУКЦИЯ ФУНКЦИОНАЛА ПОЛНОГО ТИПА ДЛЯ ОДНОРОДНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ СИСТЕМ С ЛИНЕЙНО ВОЗРАСТАЮЩИМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

**А.П. Жабко, В.С. Жигалов**

**Введение.** В настоящее время не ослабевает актуальность исследования математических моделей, описываемых дифференциально-разностными уравнениями с линейно возрастающим запаздыванием. К таким моделям относятся, в частности, динамика автомобильного потока на КАД, модель информационного сервера, распространение эпидемии и др. В работе [1] рассматривалась стабилизация линейной системы с линейным пропорциональным запаздыванием. В настоящей работе изучается асимптотическая устойчивость нулевого решения неуправляемой системы дифференциально-разностных уравнений с линейно возрастающим запаздыванием.

Рассмотрим систему уравнений с однородными правыми частями

$$\dot{x}(t)=f(x(t))+g(x(\alpha t)),\quad 0<\alpha<1, \tag{1}$$

где векторные функции $f(x)$ и $g(x)$ суть однородные порядка $\mu > 1$. Начальные условия задаются моментом времени $t_0$, вектором $x_0$ и начальной функцией $\phi \in PC\bigg([\alpha t_0, t_0], R^n\bigg), \phi(t_0) = x_0$.

**Теорема 1 (Теорема Разумихина) [2].** *Если существует положительно определенная однородная порядка $\gamma > 2$ функция $V(y) \in C^2(R^n)$ и положительно определенная однородная порядка $k = \gamma + \mu - 1$ функция $W(y) \in C^1(R^n)$ такие, что на множестве кривых*

$$S_t = \left\{ x_t \in PC\bigg([\alpha t, t], R^n\bigg) \middle| \; V(x(\tau)) < kV(x(t)), k > 1, \tau \le t, t \ge t_0 \ge 0 \right\}$$

*справедливо неравенство*

$$\left(\frac{\partial V(x(t))}{\partial t}\right)^T (f(x(t)) + g(x(\alpha t))) \le -W(x(t)),$$

*тогда нулевое решение системы (1) асимптотически устойчиво по Ляпунову.*

Следующая теорема дает возможность проанализировать устойчивость системы (1) при помощи аналогичной системы-прототипа без запаздывания.

**Теорема 2 [2].** *Если вспомогательная система уравнений*

$$\dot{y}(t) = f(y(t)) + g(y(t)) \tag{2}$$

*асимптотически устойчива по Ляпунову, то нулевое решение системы (1) также асимптотически устойчиво.*

Для линейных стационарных систем обыкновенных дифференциальных уравнений известно условие Ляпунова существования и единственности решения матричного уравнения Ляпунова $VA + A^TV = -W$ в виде симметрической матрицы $V$ для любой симметрической матрицы $W$. В данном пункте рассматривается условие разрешимости уравнения

$$\left(\frac{\partial V(x(t))}{\partial t}\right)^T f(x) = W(x) \tag{3}$$

в виде однородной порядка $k > 1$ функции $V(x)$, если функции $f(x)$ и $W(x)$ суть однородные функции порядков $\mu > 1$ и $l = k + \mu - 1$ соответственно.

Далее будем считать функции $V(x)$, $f(x)$ и $W(x)$ положительно однородными, определенными в $R^n$, непрерывными и непрерывно дифференцируемыми. Тогда, если положить $t_0 = 0$, то существует единственное непрерывно дифференцируемое по своим переменным решение $x(t, x_0)$ вспомогательной системы уравнений

$$\frac{dx}{dt} = f(x). \tag{4}$$

Очевидно, что

$$\frac{dV(x(t, x_0))}{dt} = \left(\frac{\partial V(x(t))}{\partial t}\right)^T f(x).$$

**Определение 1.** Будем говорить, что функция $f(x)$ удовлетворяет условию Ляпунова для однородных функций, если для любой положительно однородной функции $W(x)$ порядка $l = k + \mu - 1$ $(k > 1, \mu > 1)$ существует решение уравнения (3) в виде положительно однородной порядка $k > 1$ функции $V(x)$.

**Теорема 3.** *Если система уравнений (4) имеет равновесное* $x(t, \tilde{x}_0) \equiv \tilde{x}_0 \neq 0$ *или периодическое* $x(L, \tilde{x}_0) = \tilde{x}_0$ *решение, то функция* $f(x)$ *не удовлетворяет условию Ляпунова.*

**Теорема 4.** *Пусть функция* $f(x)$ *удовлетворяет условию Ляпунова для положительно однородных функций.*

*Если для некоторой точки* $\tilde{x}_0 \neq 0$ *выполнено условие* $f(\tilde{x}_0) = \alpha(||\tilde{x}_0||)\tilde{x}_0$, *причем* $\alpha(||\tilde{x}_0||) \neq 0$, *или для некоторого решения* $x(t, \hat{x}_0)$ *уравнения (4) выполнено условие* $x(L, \hat{x}_0) = \alpha\hat{x}_0$, *причем* $\alpha \neq 1$, *то для любой положительно однородной функции* $W(x)$ *порядка* $l = k + \mu - 1$ $(k > 1, \mu > 1)$ *любые два решения* $\tilde{V}(x)$ *и* $\hat{V}(x)$ *уравнения (1) удовлетворяют равенствам*

$$\tilde{V}(\gamma\tilde{x}_0) = \hat{V}(\gamma\tilde{x}_0), \gamma \geq 0) \quad \text{или} \quad \tilde{V}(x(t, \gamma\tilde{x}_0)) = \hat{V}(x(t, \gamma\tilde{x}_0)), \gamma \geq 0, t \in (-\infty, +\infty). \qquad (5)$$

Из положительной однородности функций $\tilde{V}(x)$ и $\hat{V}(x)$ следуют равенства (5) при $\gamma \geq 0$.

**Следствие 1**. *Если функция* $f(x)$ *удовлетворяет условиям теоремы 4 для всех точек, то имеет место единственность решения уравнения (1).*

**Заключение**. В докладе рассматривается проблема устойчивости однородных дифференциально-разностных систем с линейно возрастающим запаздыванием. Обоснован подход к анализу устойчивости, основанный на теоремах Разумихина. Условие Ляпунова для линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений распространено на однородные системы. Предложен подход к построению функционалов Ляпунова Красовского для однородных систем.

**Литература**

1. Екимов А. В., Жабко А. П., Яковлев П. В. *Устойчивость дифференциально–разностных систем с линейно возрастающим запаздыванием. I. Линейные управляемые системы* // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2020. Т. 16. № 3. С. 316–325.

2. Екимов А. В., Жабко А. П., Яковлев П. В. *Устойчивость дифференциально–разностных систем с линейно возрастающим запаздыванием. II. Системы с аддитивной правой частью* // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2023. Т. 16. № 1. С. 4–9.

## МОДАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНЫМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЕМ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ ПОСРЕДСТВОМ СТАТИЧЕСКОЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ ПО ВЫХОДУ

**В.А. Зайцев, И.Г. Ким**

Пусть $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{R}$; $\mathbb{K}^n = \{x = \operatorname{col}(x_1, \ldots, x_n) : x_i \in \mathbb{K}\}$ — линейное пространство вектор-столбцов над полем $\mathbb{K}$; $M_{m,n}(\mathbb{K})$ — пространство $m \times n$-матриц над полем $\mathbb{K}$; $I \in M_{n,n}(\mathbb{K})$ — единичная матрица; $\overline{a}$ означает комплексное сопряжение числа $a$; $*$ — эрмитово сопряжение матрицы.