где $w(z)$ – фиксированное решение $N-$ го уравнения (1), а $a, b, c, \mu-$ постоянные параметры. Нас интересуют условия на параметры, при выполнении которых любое локальное голоморфное решение уравнения (5) допускает аналитическое продолжение до глобально мероморфного решения, т.е. общее решение уравнения (5) мероморфно или даже рационально. Ясно, что уравнение (5) – уравнение с конечными регулярными особыми точками в полюсах $w(z)$ и для построения фундаментальной системы можно использовать метод Фробениуса. При этом наряду с регулярностью конечных особых точек $z = z_j$ необходима целостность показателей, относящихся к особым точкам и отсутствие в разложениях решений в окрестностях особых точек логарифмов $ln(z - z_j)$. Справедлива

Теорема 1. *Если для уравнения (5), где $w(z)$ – фиксированное решение уравнений (2)–(4), выполняется хотя бы одно из условий*

$$a)\ a = b = c = 0; \quad b)\ a = -1,\ b = 0,\ c = 1; \quad c)\ a = -1,\ b = 0,\ c = -1, \tag{6}$$

то общее решение уравнения (5) мероморфно.

Исключая тривиальный случай (6a), в случаях (6b) и (6c) имеем уравнения

$$u'' + (\varepsilon w' - w^2 + \mu)u = 0, \quad \varepsilon^2 = 1, \tag{7}$$

Для того, чтобы общее решение уравнения (5) было рациональным, необходимо, чтобы для решения $u(z)$ точка $z = \infty$ была полюсом или точкой голоморфности. Справедлива

Теорема 2. *Если в уравнении (7) $\mu = 0$ и $w(z) = Q'_{n-1}(z)/Q_{n-1}(z) - Q'_n(z)/Q_n(z)$ – рациональное решение уравнения (1) при $\alpha = n \in \mathbb{Z}_+$, где $Q_n = Q_n^{[N]}$ – полиномы Яблонского–Воробьева, то общее решение уравнения (7) имеет вид $u(z) = (C_1 Q_n + C_2 Q_{n-2})/Q_{n-1}$ при $\varepsilon = 1$ и $u(z) = (C_1 Q_{n-1}(z) + C_2 Q_{n+1}(z))/Q_n(z)$. при $\varepsilon = -1$.*

Заметим, что для второго уравнения Пенлеве (2) результаты работы частично получены в [3].

Литература

1. Громак В. И. *Аналитические свойства решений уравнений обобщенной иерархии второго уравнения Пенлеве* // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. №8. С. 1017–1033.

2. Домрин А.В., Сулейманов Б.И., Шумкин М.А.. *О глобальной мероморфности решений уравнений Пенлеве и их иерархий* // Труды Математического института им. В.А.Стеклова. 2020. Т. 311. С. 106–122.

3. Громак Е.В. *О мероморфных решениях линейных уравнений второго порядка, связанных со вторым уравнением Пенлеве*// Веснік Гродзенскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя Янкі Купалы. Серыя 2. Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. 2022. Т. 12. № 3. С. 42–49.

СВОЙСТВО ПЕНЛЕВЕ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

Л.В. Детченя, Е.Е. Кулеш, В.М. Пецевич

Целью данной работы является поиск необходимых и достаточных условий наличия свойства Пенлеве у решений системы двух дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} x'^2 &= (\alpha_1 x + \alpha_2)(K_1 y^2 + xy + K_2), \\ y'^2 &= (y + \beta_1)(K_1 y^2 + xy + K_2), \end{aligned} \tag{1}$$

где $|\alpha_1|+|\alpha_2|\neq 0$, α_i, β_j – аналитические функции переменной t, $K_1\neq 0$, K_i – некоторые постоянные.

Запись $P\neq 0$ означает, что P не обращается в нуль в некоторой области D.

Система (1) является частным случаем системы

$$\begin{aligned} x'^2 &= \left(a_{24}x^4+a_{23}x^3+a_{22}x^2+a_{21}x+a_{20}\right)y^2+\\ &\quad+\left(a_{14}x^4+a_{13}x^3+a_{12}x^2+a_{11}x+a_{10}\right)y+a_{04}x^4+a_{03}x^3+a_{02}x^2+a_{01}x+a_{00},\\ y'^2 &= (b_{41}y^4+b_{31}y^3+b_{21}y^2+b_{11}y+b_{01})x+b_{40}y^4+b_{30}y^3+b_{20}y^2+b_{10}y+b_{00} \end{aligned} \tag{2}$$

с аналитическими по t коэффициентами, где

$$|a_{24}|+|a_{23}|+|a_{22}|+|a_{21}|+|a_{20}|\neq 0, |b_{41}|+|b_{31}|+|b_{21}|+|b_{11}|+|b_{01}|\neq 0.$$

Система (2), когда $b_{41}=b_{31}=b_{21}=b_{11}=0$, $b_{01}\neq 0$ рассматривалась в [1]. Случай, когда $b_{41}=b_{31}=b_{21}=0$, $b_{11}\neq 0$ рассматривался в [2]. Случай, когда $|b_{41}|+|b_{31}|\neq 0$ рассматривался в [3].

Система (1) является одной из 7 систем, которые являются необходимыми условиями наличия свойства Пенлеве у системы

$$\begin{aligned} x'^2 &= \left(a_{24}x^4+a_{23}x^3+a_{22}x^2+a_{21}x+a_{20}\right)y^2+\\ &\quad+\left(a_{14}x^4+a_{13}x^3+a_{12}x^2+a_{11}x+a_{10}\right)y+a_{04}x^4+a_{03}x^3+a_{02}x^2+a_{01}x+a_{00},\\ y'^2 &= (y^2+b_{11}y+b_{01})x+b_{40}y^4+b_{30}y^3+b_{20}y^2+b_{10}y+b_{00} \end{aligned}$$

с аналитическими по t коэффициентами, где $|a_{24}|+|a_{23}|+|a_{22}|+|a_{21}|+|a_{20}|\neq 0$ [4]. (В [4] система (1) имеет обозначение (8)).

Одна из систем, полученных в [4] (в [4] имеет обозначение (11)), рассматривалась в [5].

Исключая из системы (1) компоненту x, относительно компоненты y построим дифференциальное уравнение. Используя метод малого параметра и некоторые леммы из [6], [7] получим дополнительные условия на коэффициенты системы (1).

Построив уравнение относительно компоненты x и используя метод резонансов, тест Пенлеве, метод сравнения полученных уравнений с уравнениями, аналитические свойства решений которых известны, покажем, что справедлива

Теорема. *Для того, чтобы дифференциальная система* (1) *обладала свойством Пенлеве, необходимо, чтобы она дробно-линейным преобразованием x, y и аналитической заменой независимой переменной t приводилась к одному из видов:*

$$x'^2=H_1(K_1y^2+xy+K_2),\quad y'^2=(y+H_3)(K_1y^2+xy+K_2); \tag{3}$$

$$x'^2=H_1(x+H_2)(K_1y^2+xy+K_2),\quad y'^2=(y+H_3)(K_1y^2+xy+K_2),$$

где H_1, H_2, H_3, K_1, K_2 – некоторые постоянные, и при этом $H_1\neq 0$, $K_1\neq 0$.

Дифференциальная система (3) *обладает свойством Пенлеве.*

Литература

1. Ванькова, Т. Н. *Об одном классе систем дифференциальных уравнений второго порядка без подвижных критических особенностей* / Т. Н. Ванькова, Л. В. Детченя, В. М. Пецевич, А. О. Селивёрстова // Проблемы физики, математики и техники. 2018. № 4(37). С. 62–65.

2. Белько, О. Н. *Об одном классе систем дифференциальных уравнений второго порядка со свойством Пенлеве* / О. Н. Белько, Т. Н. Ванькова, В. М. Пецевич // Веснік ГрДУ імя Янкі Купалы. Сер. 2, Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. 2020. Т. 10. № 3. С. 42–49.

3. Детченя, Л. В. *Необходимые условия наличия свойства Пенлеве для системы дифференциальных уравнений второго порядка второй степени специального вида* / Л. В. Детченя, Е. Е. Кулеш, В. М. Пецевич // Веснік ГрДУ імя Янкі Купалы. Сер. 2, Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. 2020. Т. 10. № 2. С. 30–35.

4. Детченя, Л. В. *Необходимые условия наличия свойства Пенлеве у дифференциальной системы второго порядка* / Л. В. Детченя, Е. Е. Кулеш, В. М. Пецевич // Седьмые Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям, посвящ. 100-летию со дня рождения проф. Ю.С. Богданова : материалы Междунар. математической конф., Минск, 1-4 июля 2021 г. Минск : Ин-т математики НАН Беларуси. 2021. С. 59–60.

5. Ванькова, Т. Н. *Свойство Пенлеве для одной дифференциальной системы второго порядка* / Т. Н. Ванькова, Е. Е. Кулеш, В. М. Пецевич // Еругинские чтения – 2022. В 2 ч. Ч.1. XX Международная научная конференция по дифференциальным уравнениям : материалы Междунар. науч. конф. Новополоцк, 31 мая – 3 июня 2022 г. Новополоцк : Полоцкий гос. ун-т. 2022. С. 5–7.

6. Пецевич, В. М. *Необходимые условия наличия свойства Пенлеве у системы двух дифференциальных уравнений второй степени* / В. М. Пецевич, В. А. Пронько // Проблемы физики, математики и техники. 2018. № 2(35). С. 69–75.

7. Пецевич, В. М. *Свойство Пенлеве для дифференциальной системы второго порядка* / В. М. Пецевич, Д. Н. Шевченя // Проблемы физики, математики и техники. 2016. № 1(26). С. 48–51.

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ШЕСТОГО ПОРЯДКА

Е. Е. Кулеш, И. П. Мартынов, В. М. Пецевич

В работе [1] получены семь обыкновенных дифференциальных уравнений пятого порядка со свойством Пенлеве. В рамках решения задачи классификации дифференциальных уравнений в частных производных шестого порядка по свойству Пенлеве будем строить на основе этих ОДУ дифференциальные уравнения в частных производных и исследовать их на наличие свойства Пенлеве. В работах [2–5] исследованы три из них.

Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение со свойством Пенлеве

$$y^{(5)}+4yy^{(4)}+14y'y'''+6y^2y'''+10(y'')^2+36yy'y''+4y^3y''+12(y')^3+12y^2(y')^2=0.$$

Построим на его основе дифференциальное уравнение в частных производных

$$\begin{gathered}(w_{xxxxx}+4ww_{xxxx}+14w_xw_{xxx}+6w^2w_{xxx}+10w_{xx}^2+36ww_xw_{xx}+\\ +4w^3w_{xx}+12w_x^3+12w^2w_x^2)_x=F,\end{gathered}\qquad(1)$$

где $w=w(x,t)$, F содержит слагаемые меньшего веса с производными по x и по t с аналитическими коэффициентами от (x,t). Общий вид F можно посмотреть в работе [5]. Ставится задача исследовать уравнение (1) на наличие свойства Пенлеве [6] и исследовать некоторые аналитические свойства его решений.

Резонансная структура уравнения (1) описывается наборами $(s,u_0;r_1,...,r_n)$:

$$(1,1;-1,1,2,4,5,6),(1,2;-1,-2,1,4,5,6),(1,3;-1,-2,-3,4,5,6).$$

Теорема 1. *Чтобы уравнение* (1) *имело свойство Пенлеве, необходимо, чтобы оно*