Определение 1. Будем говорить, что функция $f(x)$ удовлетворяет условию Ляпунова для однородных функций, если для любой положительно однородной функции $W(x)$ порядка $l = k + \mu - 1$ $(k > 1, \mu > 1)$ существует решение уравнения (3) в виде положительно однородной порядка $k > 1$ функции $V(x)$.

Теорема 3. *Если система уравнений (4) имеет равновесное* $x(t, \tilde{x}_0) \equiv \tilde{x}_0 \neq 0$ *или периодическое* $x(L, \tilde{x}_0) = \tilde{x}_0$ *решение, то функция* $f(x)$ *не удовлетворяет условию Ляпунова.*

Теорема 4. *Пусть функция* $f(x)$ *удовлетворяет условию Ляпунова для положительно однородных функций.*

Если для некоторой точки $\tilde{x}_0 \neq 0$ *выполнено условие* $f(\tilde{x}_0) = \alpha(||\tilde{x}_0||)\tilde{x}_0$, *причем* $\alpha(||\tilde{x}_0||) \neq 0$, *или для некоторого решения* $x(t, \hat{x}_0)$ *уравнения (4) выполнено условие* $x(L, \hat{x}_0) = \alpha\hat{x}_0$, *причем* $\alpha \neq 1$, *то для любой положительно однородной функции* $W(x)$ *порядка* $l = k + \mu - 1$ $(k > 1, \mu > 1)$ *любые два решения* $\tilde{V}(x)$ *и* $\hat{V}(x)$ *уравнения (1) удовлетворяют равенствам*

$$\tilde{V}(\gamma\tilde{x}_0) = \hat{V}(\gamma\tilde{x}_0), \gamma \geq 0) \quad \textit{или} \quad \tilde{V}(x(t, \gamma\tilde{x}_0)) = \hat{V}(x(t, \gamma\tilde{x}_0)), \gamma \geq 0, t \in (-\infty, +\infty). \tag{5}$$

Из положительной однородности функций $\tilde{V}(x)$ и $\hat{V}(x)$ следуют равенства (5) при $\gamma \geq 0$.

Следствие 1. *Если функция* $f(x)$ *удовлетворяет условиям теоремы 4 для всех точек, то имеет место единственность решения уравнения (1).*

Заключение. В докладе рассматривается проблема устойчивости однородных дифференциально-разностных систем с линейно возрастающим запаздыванием. Обоснован подход к анализу устойчивости, основанный на теоремах Разумихина. Условие Ляпунова для линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений распространено на однородные системы. Предложен подход к построению функционалов Ляпунова Красовского для однородных систем.

Литература

1. Екимов А. В., Жабко А. П., Яковлев П. В. *Устойчивость дифференциально–разностных систем с линейно возрастающим запаздыванием. I. Линейные управляемые системы* // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2020. Т. 16. № 3. С. 316–325.

2. Екимов А. В., Жабко А. П., Яковлев П. В. *Устойчивость дифференциально–разностных систем с линейно возрастающим запаздыванием. II. Системы с аддитивной правой частью* // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2023. Т. 16. № 1. С. 4–9.

МОДАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНЫМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЕМ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ ПОСРЕДСТВОМ СТАТИЧЕСКОЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ ПО ВЫХОДУ

В.А. Зайцев, И.Г. Ким

Пусть $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{R}$; $\mathbb{K}^n = \{x = \operatorname{col}(x_1, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{K}\}$ — линейное пространство вектор-столбцов над полем $\mathbb{K}$; $M_{m,n}(\mathbb{K})$ — пространство $m \times n$-матриц над полем $\mathbb{K}$; $I \in M_{n,n}(\mathbb{K})$ — единичная матрица; $\overline{a}$ означает комплексное сопряжение числа a; $*$ — эрмитово сопряжение матрицы.

Рассмотрим линейную стационарную управляемую систему, которая задана линейным дифференциальным уравнением n-го порядка с распределенным запаздыванием в состоянии, на вход которой подается линейная комбинация из m сигналов и их производных до порядка $(n-p)$ включительно $(1 \leqslant p \leqslant n)$, а измерению доступны k различных линейных комбинаций состояния $x(t)$ и его производных до порядка $(p-1)$ включительно:

$$x^{(n)}(t) + \sum_{i=1}^{n} \int_{-h}^{0} dg_i(\tau) x^{(n-i)}(t+\tau) = \sum_{\alpha=1}^{m} \sum_{l=p}^{n} b_{l\alpha} u_{\alpha}^{(n-l)}(t), \quad t > 0, \tag{1}$$

$$y_{\beta}(t) = \sum_{\nu=1}^{p} \overline{c}_{\nu\beta} x^{(\nu-1)}(t), \quad \beta = \overline{1,k}, \tag{2}$$

с начальными условиями $x^{(n-i)}(\tau) = \phi_i(\tau)$, $\tau \in [-h, 0]$; здесь $h > 0$ — постоянное запаздывание, $\phi_i : [-h, 0] \to \mathbb{K}$ — непрерывные функции; $g_i \colon [-h, 0] \to \mathbb{K}$ — функции ограниченной вариации, $b_{l\alpha}, c_{\nu\beta} \in \mathbb{K}$, $i = \overline{1,n}$, $l = \overline{p,n}$, $\alpha = \overline{1,m}$, $\nu = \overline{1,p}$, $\beta = \overline{1,k}$; $u = \operatorname{col}(u_1, \ldots, u_m) \in \mathbb{K}^m$ — вектор управления, $y = \operatorname{col}(y_1, \ldots, y_k) \in \mathbb{K}^k$ — выходной вектор; $p \in \{\overline{1,n}\}$.

Пусть управление в системе (1), (2) имеет вид линейной статической обратной связи по выходу с распределенным запаздыванием

$$u(t) = \int_{-\sigma}^{0} dR(\tau) y(t+\tau), \tag{3}$$

$y(t) = 0$, $t < -h$. Здесь $R(\tau) = \{r_{\alpha\beta}(\tau)\} \in M_{m,k}(\mathbb{K})$, $r_{\alpha\beta} \colon [-\sigma, 0] \to \mathbb{K}$ — функции ограниченной вариации, $\alpha = \overline{1,m}$, $\beta = \overline{1,k}$.

Определение 1. Для системы (1), (2) разрешима задача модального управления посредством регулятора (3), если для любого числа $\omega \geq 0$ и любых функций ограниченной вариации $\delta_i \colon [-\omega, 0] \to \mathbb{K}$, $i = \overline{1,n}$, найдутся целое число $\sigma > 0$ и матричная функция ограниченной вариации $R \colon [-\sigma, 0] \to M_{m,k}(\mathbb{K})$ такие, что характеристическая функция замкнутой системы (1), (2), (3) удовлетворяет равенству

$$\varphi(\lambda) = \lambda^n + \sum_{i=1}^{n} \lambda^{n-i} \int_{-\omega}^{0} d\delta_i(\tau) e^{\lambda\tau}.$$

Построим по системе (1), (2) матрицы $B = \{b_{l\alpha}\}$, $l = \overline{1,n}$, $\alpha = \overline{1,m}$, и $C = \{c_{\nu\beta}\}$, $\nu = \overline{1,n}$, $\beta = \overline{1,k}$, где $b_{l\alpha} = 0$ при $l < p$ и $c_{\nu\beta} = 0$ при $\nu > p$. Пусть $J = \{\vartheta_{ij}\} \in M_{n,n}(\mathbb{R})$, где $\vartheta_{ij} = 1$ при $j = i+1$ и $\vartheta_{ij} = 0$ при $j \neq i+1$. Положим $J^0 := I$.

Теорема 1. *Для системы* (1), (2) *разрешима задача модального управления посредством регулятора* (3) *тогда и только тогда, когда матрицы*

$$C^* J^0 B, \quad C^* J B, \quad \ldots, \quad C^* J^{n-1} B \tag{4}$$

линейно независимы.

Следствие 1. *Пусть матрицы* (4) *линейно независимы. Тогда система* (1), (2) *экспоненциально стабилизируема посредством регулятора* (3).

Полученные результаты развивают исследования задачи модального управления посредством статической обратной связи по выходу для дифференциального уравнения n-го порядка с запаздываниями, проведенные в работах [1]–[5].

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ в рамках государственного задания № 075-01483-23-00, проект FEWS-2020-0010.

Литература

1. Zaitsev V. A., Kim I. G. *Arbitrary spectrum assignment by static output feedback for linear differential equations with state variable delays* // IFAC-PapersOnLine. 2018. Vol. 51. Issue 32. P. 810–814.

2. Zaitsev V. A., Kim I. G. *Spectrum assignment and stabilization of linear differential equations with delay by static output feedback with delay* // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2020. Т. 30. Вып. 2. С. 208–220.

3. Зайцев В. А., Ким И. Г. *Назначение спектра в линейных системах с несколькими соизмеримыми сосредоточенными и распределенными запаздываниями в состоянии посредством статической обратной связи по выходу* // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2020. Т. 56. С. 5–19.

4. Zaitsev V., Kim I. *Arbitrary coefficient assignment by static output feedback for linear differential equations with non-commensurate lumped and distributed delays* // Mathematics. 2021. Vol. 9. Issue 17. Article 2158.

5. Зайцев В. А., Ким И. Г. *Модальное управление и стабилизация линейных систем статической обратной связью по выходу.* Ижевск: Удмуртский университет, 2022.

ЗАДАЧА ОПТИМИЗАЦИИ ПЕРЕХОДНОГО ПРОЦЕССА В КВАЗИЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЕ НА НЕФИКСИРОВАННОМ ВРЕМЕННОМ ПРОМЕЖУТКЕ

А.И. Калинин, Л.И. Лавринович

В рамках математической теории оптимальных процессов задачам оптимизации квазилинейных динамических систем, содержащих малые параметры при нелинейностях, уделяется значительное внимание. Интерес к ним вызван эффективностью асимптотических методов их решения, при применении которых исходные по существу нелинейные задачи сводятся к сравнительно несложной коррекции решений задач оптимизации линейных динамических систем. Настоящий доклад посвящен построению асимптотических приближений к решению задачи оптимизации переходного процесса в квазилинейной системе. Критерий качества в этой задаче представляет собой линейную комбинацию энергетических затрат и длительности процесса.

В классе r-мерных управляющих воздействий $u(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, с кусочно-непрерывными компонентами рассмотрим следующую задачу оптимального управления:

$$\dot{x} = A(t)x + \mu f(x,t) + B(t)u, x(t_0) = x_0 \neq 0, \tag{1}$$

$$x(t_1) = 0, J(u) = \int_{t_0}^{t_1} (1 + u^{\mathrm{T}} P(t)u) dt \to \min, \tag{2}$$

где μ – малый (по модулю) параметр, t_0 – заданный момент времени, t_1 — нефиксированный конечный момент времени $(t_1 > t_0)$, x – n-вектор, $f(x,t)$, $x \in R^n$, $t \geq t_0$, – нелинейная вектор-функция, а $P(t)$ – положительно-определенная симметрическая матрица для всех $t \geq t_0$.