Полученные результаты развивают исследования задачи модального управления посредством статической обратной связи по выходу для дифференциального уравнения n-го порядка с запаздываниями, проведенные в работах [1]–[5].

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ в рамках государственного задания № 075-01483-23-00, проект FEWS-2020-0010.

Литература

1. Zaitsev V. A., Kim I. G. *Arbitrary spectrum assignment by static output feedback for linear differential equations with state variable delays* // IFAC-PapersOnLine. 2018. Vol. 51. Issue 32. P. 810–814.

2. Zaitsev V. A., Kim I. G. *Spectrum assignment and stabilization of linear differential equations with delay by static output feedback with delay* // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2020. Т. 30. Вып. 2. С. 208–220.

3. Зайцев В. А., Ким И. Г. *Назначение спектра в линейных системах с несколькими соизмеримыми сосредоточенными и распределенными запаздываниями в состоянии посредством статической обратной связи по выходу* // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2020. Т. 56. С. 5–19.

4. Zaitsev V., Kim I. *Arbitrary coefficient assignment by static output feedback for linear differential equations with non-commensurate lumped and distributed delays* // Mathematics. 2021. Vol. 9. Issue 17. Article 2158.

5. Зайцев В. А., Ким И. Г. *Модальное управление и стабилизация линейных систем статической обратной связью по выходу.* Ижевск: Удмуртский университет, 2022.

ЗАДАЧА ОПТИМИЗАЦИИ ПЕРЕХОДНОГО ПРОЦЕССА В КВАЗИЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЕ НА НЕФИКСИРОВАННОМ ВРЕМЕННОМ ПРОМЕЖУТКЕ

А.И. Калинин, Л.И. Лавринович

В рамках математической теории оптимальных процессов задачам оптимизации квазилинейных динамических систем, содержащих малые параметры при нелинейностях, уделяется значительное внимание. Интерес к ним вызван эффективностью асимптотических методов их решения, при применении которых исходные по существу нелинейные задачи сводятся к сравнительно несложной коррекции решений задач оптимизации линейных динамических систем. Настоящий доклад посвящен построению асимптотических приближений к решению задачи оптимизации переходного процесса в квазилинейной системе. Критерий качества в этой задаче представляет собой линейную комбинацию энергетических затрат и длительности процесса.

В классе r-мерных управляющих воздействий $u(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, с кусочно-непрерывными компонентами рассмотрим следующую задачу оптимального управления:

$$\dot{x} = A(t)x + \mu f(x,t) + B(t)u, x(t_0) = x_0 \neq 0, \tag{1}$$

$$x(t_1) = 0, J(u) = \int_{t_0}^{t_1} (1 + u^{\mathrm{T}} P(t)u)dt \to \min, \tag{2}$$

где μ – малый (по модулю) параметр, t_0 – заданный момент времени, t_1 — нефиксированный конечный момент времени $(t_1 > t_0)$, x – n-вектор, $f(x,t)$, $x \in R^n$, $t \geq t_0$, – нелинейная вектор-функция, а $P(t)$ – положительно-определенная симметрическая матрица для всех $t \geq t_0$.

Следует отметить, что если учесть в целевой функции только энергетические затраты, то задача с нефиксированным временем, как правило, не будет иметь решения, а на минимизирующей последовательности длительность процесса будет стремиться к бесконечности.

Предположение 1. Элементы матриц $A(t)$, $B(t)$, $P(t)$, $\partial f(x,t)/\partial x$, $x \in R^n$, $t \geq t_0$, принадлежат классу C^p, $p \geq 1$.

Определение Управление $u^{(N)}(t,\mu)$, $t \in [t_0, t_1^{(N)}(\mu)]$, с кусочно-непрерывными компонентами назовем (программным) асимптотически субоптимальным управлением N-го порядка $(N = 0,1,2,\dots)$ в задаче (1), (2), если оно переводит систему (1) в состояние $O(\mu^{N+1})$ и отклоняется по критерию качества $J(u)$ от оптимального управления на величину того же порядка малости.

В докладе предлагается алгоритм, с помощью которого для заданного числа N $(N < < p)$ можно построить асимптотически субоптимальное управление N-го порядка в рассматриваемой задаче. Алгоритм опирается на конструктивное доказательство теоремы о существовании при сделанных предположениях гладкого оптимального управления и его асимптотических свойствах. Его суть состоит в построении полиномов Тейлора определяющих элементов оптимального управления. Такими элементами в данной задаче являются конечный момент времени, а также начальные значения сопряженных переменных (в момент времени t_0), которые в силу принципа максимума [1] соответствуют оптимальному управлению. Эти определяющие элементы как функции малого параметра принадлежат классу C^p.

Вычисления при построении асимптотически субоптимальных управлений начинаются с решения базовой задачи, которая формально получается из исходной при $\mu = 0$, и в отличие от нее является задачей оптимизации линейной системы.

Предположение 2. Динамическая система в базовой задаче является вполне управляемой [2].

Заметим, что для стационарной динамической системы это предположение эквивалентно требованию

$$rank(B, AB, \dots, A^{n-1}B) = n.$$

При сделанном предположении в базовой задаче существует единственное оптимальное управление, которое является нормальной экстремалью. Последнее означает, что принцип максимума [1] в данном случае может быть сформулирован следующим образом: пусть t_1^0 – оптимальный конечный момент, $u^0(t)$, $x^0(t)$, $t \in T^0 = [t_0, t_1^0]$, – оптимальные управление и траектория в базовой задаче, тогда существует такое решение $\psi^0(t)$, $t \in T^0$, сопряженной системы

$$\dot{\psi} = -A^T(t)\psi,$$

что выполняются условия

$$\psi^{0^{\mathrm{T}}}(t)B^{\mathrm{T}}(t)u^0(t) - u^{0^{\mathrm{T}}}(t)P(t)u^0(t) = \max_{u \in R^r}(\psi^{0^{\mathrm{T}}}(t)B^{\mathrm{T}}(t)u - u^{\mathrm{T}}P(t)u), t \in T^0, \tag{3}$$

$$\psi^{0^{\mathrm{T}}}(t_1^0)B^{\mathrm{T}}(t_1^0)u^0(t_1^0) - u^{0^{\mathrm{T}}}(t_1^0)P(t_1^0)u(t_1^0) = 1.$$

Из условия (3) непосредственно следует

$$u^0(t) = \frac{1}{2}P^{-1}(t)B^{\mathrm{T}}(t)\psi^0(t).$$

Вычислительная процедура при построении асимптотически субоптимальных управлений помимо решения базовой задачи, включает интегрирование систем линейных дифференциальных уравнений, а также нахождение корней невырожденных линейных алгебраических систем. Заметим, что при сделанных предположениях асимптотически субоптимальным управлением нулевого порядка является решение базовой задачи.

Литература

1. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. *Математическая теория оптимальных процессов.* М.: Наука, 1983.

2. Красовский Н.Н. *Теория управления движением.* М.: Наука, 1968.

НЕПОДВИЖНЫЕ ТОЧКИ ОТОБРАЖЕНИЙ, ПОРОЖДЕННЫХ СИСТЕМОЙ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С РЕЛЕЙНЫМ ГИСТЕРЕЗИСОМ

А.М. Камачкин, В.В. Евстафьева, Д.К. Потапов

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\dot{X} = AX + BF(\sigma). \tag{1}$$

Здесь X – вектор состояний системы, $X \in \mathbb{R}^n$, A – постоянная невырожденная квадратная матрица n-го порядка с вещественными элементами, B – постоянный ненулевой вектор из $\mathbb{R}^n$ с вещественными элементами, $F(\sigma)$ – многозначная функция, описывающая нелинейность типа неидеального (гистерезисного) двухпозиционного реле с пороговыми значениями l_1, l_2 ($l_1 < l_2$) и значениями выхода m_1, m_2 ($m_1 < m_2$), $\sigma = (\Gamma, X)$ – скалярное произведение векторов Γ и X, где Γ – постоянный ненулевой вектор из $\mathbb{R}^n$ с вещественными элементами. Функция $F(\sigma(t))$ определена при непрерывном входе $\sigma(t)$ для $t \geq 0$ в классе кусочно-непрерывных функций и задается следующим образом: из неравенства $\sigma(t) \leq l_1$ следует равенство $F(\sigma) = m_1$, из неравенства $\sigma(t) \geq l_2$ – равенство $F(\sigma) = m_2$, а из неравенств $l_1 < \sigma(t) < l_2$ ($t_1 < t \leq t_2$) – равенство $F(\sigma(t_1)) = F(\sigma(t_2))$.

В пространстве $\mathbb{R}^n$ уравнение $(\Gamma, X) = l_i$ ($i = 1, 2$) определяет гиперплоскость, которую называют *поверхностью переключения* (далее поверхность L_i), поскольку в ее точках происходит переключение реле. Эти точки называют *точками переключения.*

Траектория любого непрерывного решения системы (1) с точками переключения в фазовом пространстве состоит из кусков траекторий в силу систем

$$\dot{X} = AX + Bm_1, \quad \dot{X} = AX + Bm_2, \tag{2}$$

склеивание которых происходит в точках переключения. Непрерывному периодическому решению системы (1) соответствует замкнутая фазовая траектория (периодическая орбита) с точкой переключения X^*, удовлетворяющей равенствам $X^* = X(t_0) = X(t_0 + T)$, $(\Gamma, X^*) = l_i$ ($i = 1, 2$), где t_0 – начальный момент времени, T – период, за который изображающая точка решения возвращается в точку X^*.

Будем рассматривать непрерывные периодические решения с траекториями, составленными из конечного числа кусков траекторий в силу систем (2), число этих кусков совпадает с числом точек переключения за период T. В силу решения системы (1) поверхность L_i (или ее подмножество) отображается в себя.