Вычислительная процедура при построении асимптотически субоптимальных управлений помимо решения базовой задачи, включает интегрирование систем линейных дифференциальных уравнений, а также нахождение корней невырожденных линейных алгебраических систем. Заметим, что при сделанных предположениях асимптотически субоптимальным управлением нулевого порядка является решение базовой задачи.

Литература

1. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. *Математическая теория оптимальных процессов.* М.: Наука, 1983.

2. Красовский Н.Н. *Теория управления движением.* М.: Наука, 1968.

НЕПОДВИЖНЫЕ ТОЧКИ ОТОБРАЖЕНИЙ, ПОРОЖДЕННЫХ СИСТЕМОЙ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С РЕЛЕЙНЫМ ГИСТЕРЕЗИСОМ

А.М. Камачкин, В.В. Евстафьева, Д.К. Потапов

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\dot{X} = AX + BF(\sigma). \tag{1}$$

Здесь X – вектор состояний системы, $X \in \mathbb{R}^n$, A – постоянная невырожденная квадратная матрица n-го порядка с вещественными элементами, B – постоянный ненулевой вектор из $\mathbb{R}^n$ с вещественными элементами, $F(\sigma)$ – многозначная функция, описывающая нелинейность типа неидеального (гистерезисного) двухпозиционного реле с пороговыми значениями l_1, l_2 ($l_1 < l_2$) и значениями выхода m_1, m_2 ($m_1 < m_2$), $\sigma = (\Gamma, X)$ – скалярное произведение векторов Γ и X, где Γ – постоянный ненулевой вектор из $\mathbb{R}^n$ с вещественными элементами. Функция $F(\sigma(t))$ определена при непрерывном входе $\sigma(t)$ для $t \geq 0$ в классе кусочно-непрерывных функций и задается следующим образом: из неравенства $\sigma(t) \leq l_1$ следует равенство $F(\sigma) = m_1$, из неравенства $\sigma(t) \geq l_2$ – равенство $F(\sigma) = m_2$, а из неравенств $l_1 < \sigma(t) < l_2$ ($t_1 < t \leq t_2$) – равенство $F(\sigma(t_1)) = F(\sigma(t_2))$.

В пространстве $\mathbb{R}^n$ уравнение $(\Gamma, X) = l_i$ ($i = 1, 2$) определяет гиперплоскость, которую называют *поверхностью переключения* (далее поверхность L_i), поскольку в ее точках происходит переключение реле. Эти точки называют *точками переключения.*

Траектория любого непрерывного решения системы (1) с точками переключения в фазовом пространстве состоит из кусков траекторий в силу систем

$$\dot{X} = AX + Bm_1, \quad \dot{X} = AX + Bm_2, \tag{2}$$

склеивание которых происходит в точках переключения. Непрерывному периодическому решению системы (1) соответствует замкнутая фазовая траектория (периодическая орбита) с точкой переключения X^*, удовлетворяющей равенствам $X^* = X(t_0) = X(t_0 + T)$, $(\Gamma, X^*) = l_i$ ($i = 1, 2$), где t_0 – начальный момент времени, T – период, за который изображающая точка решения возвращается в точку X^*.

Будем рассматривать непрерывные периодические решения с траекториями, составленными из конечного числа кусков траекторий в силу систем (2), число этих кусков совпадает с числом точек переключения за период T. В силу решения системы (1) поверхность L_i (или ее подмножество) отображается в себя.

Непрерывный оператор P, отображающий некоторое связное компактное множество $S_i \subset L_i$ $(i = 1,2)$ в себя в силу решения системы (1), представим в виде

$$P(X_0, T(X_0)) = e^{A(T(X_0)-t_0)} \left(X_0 + \int\limits_{t_0}^{T(X_0)} e^{-A(\tau - t_0)} BF(\sigma) d\tau \right), \tag{3}$$

где $X_0 = X(t_0)$ – начальная точка отображения, $X_0 \in S_i$, $T(X_0)$ – время возврата изображающей точки по траектории, задаваемой системой (1), в множество S_i.

Пусть существует периодическое решение $X(\cdot)$ системы (1) с $2k$ $(k \in \mathbb{N})$ точками переключения X^1, X^2, $\ldots$, X^{2k} в фазовом пространстве. Изображающая точка решения начинает движение в точке X^1 на поверхности L_1 в момент времени t_0 и достигает поверхности L_2 в точке X^2 в момент времени t_1 в силу системы (1) при $F(\sigma) = m_1$, затем переходит на L_1 в точку X^3 в момент времени t_2 в силу системы (1) при $F(\sigma) = m_2$ и так продолжает движение от L_1 к L_2 и обратно k раз. В момент времени t_{2k} изображающая точка возвращается на поверхность L_1 в начальную точку X^1 в силу системы (1) при $F(\sigma) = m_2$. Значит, $t_{2k} = T$.

Пусть имеют место неравенства

$$-(\Gamma, A^{-1}Bm_2) < l_1, \quad -(\Gamma, A^{-1}Bm_1) > l_2. \tag{4}$$

Неравенства (4) дают условие, при котором для систем (2) выполняется равенство $\dot{X} = 0$ в точке $X_i = -A^{-1}Bm_i$ $(i = 1,2)$, лежащей в фазовом пространстве вне области между поверхностями переключения (т.е. вне зоны неоднозначности $F(\sigma)$).

Далее выпишем систему относительно точек и моментов времени переключения в соответствии с описанным выше поведением движения изображающей точки решения. Имеем

$$\begin{gathered}
(\Gamma, X^1) = l_1, \quad X^2 = e^{A(t_1 - t_0)} X^1 + \int\limits_{t_0}^{t_1} e^{A(t_1 - \tau)} Bm_1 d\tau, \\
(\Gamma, X^2) = l_2, \quad X^3 = e^{A(t_2 - t_1)} X^2 + \int\limits_{t_1}^{t_2} e^{A(t_2 - \tau)} Bm_2 d\tau, \\
\ldots \\
(\Gamma, X^{2k}) = l_2, \quad X^1 = e^{A(t_{2k} - t_{2k-1})} X^{2k} + \int\limits_{t_{2k-1}}^{t_{2k}} e^{A(t_{2k} - \tau)} Bm_2 d\tau.
\end{gathered} \tag{5}$$

Система (5) описывает процесс отображения множества $S_1 \subset L_1$ в себя. Аналогично можно построить процесс отображения $S_2 \subset L_2$ в себя. При этом точка $X^j \in S_i$ $(j = \overline{1, 2k}$, $i = 1,2)$ принадлежит траектории периодического решения.

Итак, система (5) для любого $k \in \mathbb{N}$ задает отображение множества S_1 в себя с оператором P, определенным формулой (3). Оператор P обозначим через P_2, если отображение множества S_1 в себя имеет два перехода в силу систем (2), через P_4, если четыре перехода и т.д. В результате получим семейство $\{P_{2k}\}_{k=1}^{\infty}$, каждый оператор которого соответствует отображению множества S_1 в себя. Если оператор P_{2k} имеет неподвижную точку, то существует периодическое решение системы (1) с $2k$ точками переключения в фазовом пространстве.

Задача состоит в том, чтобы установить условия, при которых система (1) имеет периодические решения, соответствующие операторам из семейства $\{P_{2k}\}_{k=1}^{\infty}$.

В [1] получены условия существования неподвижных точек отображения, порожденного системой (1), единственности неподвижной точки, а также условия, при которых существуют одновременно неподвижные точки у различных типов отображений.

Данная работа развивает результаты из [1]. Нижеследующая теорема дает необходимое и достаточное условие существования единственной неподвижной точки одновременно у всех возможных отображений, порождаемых системой (1).

Теорема. *Пусть в системе (1) матрица A имеет собственные числа с отрицательными вещественными частями, $(\Gamma, B) \neq 0$ и выполнены неравенства (4). Семейство операторов $\{P_{2k}\}_{k=1}^{\infty}$ имеет единственную неподвижную точку тогда и только тогда, когда для $n \geq 3$ выполняется равенство $(-1)^{n-2}\mathrm{sign} J_{P_2}(X_{fp}) = -1$, где X_{fp} – неподвижная точка отображения $P_2(X)$, $J_{P_2}(X_{fp})$ – якобиан отображения $P_2(X)$, вычисленный в точке X_{fp}.*

Исследование второго и третьего авторов выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-21-00069, https://rscf.ru/project/23-21-00069/.

Литература

1. Камачкин А. М., Потапов Д. К., Евстафьева В. В. *Неподвижные точки отображения, порожденного системой обыкновенных дифференциальных уравнений с релейным гистерезисом* // Дифференциальные уравнения. 2022. Т. 58. № 4. С. 456–469.

О ФАКТОРИЗАЦИИ МАТРИЦ С ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕМ СТРОГО ПОЛОЖИТЕЛЬНО РЕГУЛЯРНЫМИ МАТРИЦАМИ

А.А. Козлов, Т.А. Александрович

Пусть $\mathbb{R}^n$ – n-мерное евклидово векторное пространство с нормой $\|x\| = \sqrt{x^T x}$; M_n – пространство вещественных матриц размерности $n \times n$ со спектральной (операторной) нормой $\|H\| = \max_{\|x\|=1}\|Hx\|$, т.е. нормой, индуцируемой на M_n евклидовой нормой в пространстве $\mathbb{R}^n$.

Определение 1. Для любого числа $k \in \{1, \ldots, n\}$ и всякой матрицы $H = (h_{ij})_{i,j=1}^{n} \in$ $\in \mathrm{M}_n$ через $H\{k\} \in \mathrm{M}_k$ обозначим ее *главную ведущую подматрицу* порядка k [1, с. 30], т.е.

$$H\{1\} := h_{11} \in \mathrm{M}_1, \quad H\{2\} := \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2, \quad \ldots, \quad H\{n\} := H \in \mathrm{M}_n.$$

Главным ведущим (угловым) минором k-ого порядка квадратной матрицы $H \in \mathrm{M}_n$ будем называть [1, с. 30] определитель ее ведущей главной подматрицы k-ого порядка, т.е. $\det H\{k\}$.

Определение 2. Возьмем любое число $\rho > 0$. Матрицу $H \in \mathrm{M}_n$ назовем *строго ρ-положительно регулярной*, если при всяком $i = \overline{1,n}$ имеют место неравенства $\det H\{i\} \geqslant \rho$.

Теорема. *При любых числах $r > 0$ и $\rho > 0$ и всякой матрице $H \in \mathrm{M}_n$, удовлетворяющей неравенствам $\|H\| \leqslant r$ и $\det H \geqslant \rho$, найдутся величина $\theta = \theta(r, \rho) > 0$ и строго θ-положительно регулярные матрицы H_i, $i = \overline{1,5}$, обеспечивающие равенство $H = \prod_{i=1}^{5} H_i$.*