Задача состоит в том, чтобы установить условия, при которых система (1) имеет периодические решения, соответствующие операторам из семейства $\{P_{2k}\}_{k=1}^{\infty}$.

В [1] получены условия существования неподвижных точек отображения, порожденного системой (1), единственности неподвижной точки, а также условия, при которых существуют одновременно неподвижные точки у различных типов отображений.

Данная работа развивает результаты из [1]. Нижеследующая теорема дает необходимое и достаточное условие существования единственной неподвижной точки одновременно у всех возможных отображений, порождаемых системой (1).

Теорема. *Пусть в системе (1) матрица A имеет собственные числа с отрицательными вещественными частями, $(\Gamma, B) \neq 0$ и выполнены неравенства (4). Семейство операторов $\{P_{2k}\}_{k=1}^{\infty}$ имеет единственную неподвижную точку тогда и только тогда, когда для $n \geq 3$ выполняется равенство $(-1)^{n-2}\mathrm{sign} J_{P_2}(X_{fp}) = -1$, где X_{fp} – неподвижная точка отображения $P_2(X)$, $J_{P_2}(X_{fp})$ – якобиан отображения $P_2(X)$, вычисленный в точке X_{fp}.*

Исследование второго и третьего авторов выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-21-00069, https://rscf.ru/project/23-21-00069/.

Литература

1. Камачкин А. М., Потапов Д. К., Евстафьева В. В. *Неподвижные точки отображения, порожденного системой обыкновенных дифференциальных уравнений с релейным гистерезисом* // Дифференциальные уравнения. 2022. Т. 58. № 4. С. 456–469.

О ФАКТОРИЗАЦИИ МАТРИЦ С ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕМ СТРОГО ПОЛОЖИТЕЛЬНО РЕГУЛЯРНЫМИ МАТРИЦАМИ

А.А. Козлов, Т.А. Александрович

Пусть $\mathbb{R}^n$ – n-мерное евклидово векторное пространство с нормой $\|x\| = \sqrt{x^T x}$; M_n – пространство вещественных матриц размерности $n \times n$ со спектральной (операторной) нормой $\|H\| = \max_{\|x\|=1}\|Hx\|$, т.е. нормой, индуцируемой на M_n евклидовой нормой в пространстве $\mathbb{R}^n$.

Определение 1. Для любого числа $k \in \{1, \ldots, n\}$ и всякой матрицы $H = (h_{ij})_{i,j=1}^n \in$ $\in$ M_n через $H\{k\} \in \mathrm{M}_k$ обозначим ее *главную ведущую подматрицу* порядка k [1, с. 30], т.е.

$$H\{1\} := h_{11} \in \mathrm{M}_1, \quad H\{2\} := \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2, \quad \ldots, \quad H\{n\} := H \in \mathrm{M}_n.$$

Главным ведущим (*угловым*) *минором k-ого порядка* квадратной матрицы $H \in \mathrm{M}_n$ будем называть [1, с. 30] определитель ее ведущей главной подматрицы k-ого порядка, т.е. $\det H\{k\}$.

Определение 2. Возьмем любое число $\rho > 0$. Матрицу $H \in \mathrm{M}_n$ назовем *строго ρ-положительно регулярной*, если при всяком $i = \overline{1,n}$ имеют место неравенства $\det H\{i\} \geqslant \rho$.

Теорема. *При любых числах $r > 0$ и $\rho > 0$ и всякой матрице $H \in \mathrm{M}_n$, удовлетворяющей неравенствам $\|H\| \leqslant r$ и $\det H \geqslant \rho$, найдутся величина $\theta = \theta(r, \rho) > 0$ и строго θ-положительно регулярные матрицы H_i, $i = \overline{1,5}$, обеспечивающие равенство $H = \prod_{i=1}^5 H_i$.*

Установленное разложение позволит доказать наличие свойства равномерной глобальной достижимости [2, 3] для равномерно вполне управляемой [4, 5] линейной периодической системы обыкновенных дифференциальных уравнений, а также для равномерно вполне управляемой [6] дискретной линейной управляемой системы [7] с периодическими коэффициентами.

Работа выполнена при финансовой поддержке ГПНИ "Конвергенция-2025" (подпрограмма "Методы математического моделирования сложных систем задание 1.2.01 "Управление асимптотическими характеристиками дискретных и непрерывных динамических систем; разработка аппарата дробного интегро-дифференцирования для изучения задач разрешимости дифференциальных уравнений дробного порядка и асимптотики их решений"(№ ГР 20211316)).

Литература

1. Хорн Р., Джонсон Ч. *Матричный анализ.* М.: Мир, 1989.

2. Зайцев, В. А., Тонков, Е. Л. *Достижимость, согласованность и метод поворотов В. М. Миллионщикова* // Известия вузов. Математика. 1999. № 2(441). С. 60–67.

3. Макаров Е. К., Попова С. Н. *Управляемость асимптотических инвариантов нестационарных линейных систем.* Минск: Беларус. навука, 2012.

4. Kalman, R. E. *Contribution to the theory of optimal control* // Boletin de la Sociedad Matematika Mexicana. 1960. Vol. 5. № 1. Pp. 102–119.

5. Тонков, Е. Л. *Критерий равномерной управляемости и стабилизации линейной реккурентной системы* / Е.Л. Тонков // Дифференциальные уравнения. 1979. Т. 15. № 10. С. 1804–1813.

6. Babiarz A., Chornik A., Makarov E., Niezabitowski M., Popova S. *Pole placement theorem of discrete time-varying linear systems* // SIAM Journal on Control and Optimization. 2017. Vol. 55. № 2. Pp. 671–692.

7. Гайшун И. В. *Системы с дискрентным временем.* Минск: Институт математики НАН Беларуси, 2001.

УПРАВЛЯЕМОСТЬ СОСТАВНЫХ КАУЗАЛЬНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В.В. Крахотко, Г.П. Размыслович

Пусть на отрезке времени $[t_0, T]$ заданы промежуточные моменты $t_i, \quad 1 \leq i \leq m$, такие, что $0 \leq t_0 < t_1 < t_2, \ldots < t_{m-1} < t_m = T$.

Рассмотрим динамическую систему, определённую на отрезке $[t_0, T]$, которая на каждом промежутке времени $]t_{k-1}, t_k], \quad 1 \leq k \leq m$, описывается системой вида

$$A_0 \dot{x}^{(k)}(t) = A_k x^{(k)}(t) + B_k u^{(k)}(t), \tag{1}$$

где $x^{(k)} \in R^n$ – фазовый вектор системы; $A_0, A_k \in R_{n,n}$, $B_k \in R_{n,l}$ – заданные матрицы; причём $\det A_0 = 0$; $u^{(k)} \in R^l$ – управление.

Будем считать, что система (1), на указанном промежутке времени является каузальной [1-3].

Составную систему, определённую на отрезке $[t_0, T]$, назовём каузальной, если на каждом промежутке времени $[t_{k-1}, t_k]$ система вида (1) является каузальной.

Пусть для составной каузальной системы заданы начальное состояние в момент t_0, т.е.

$$x^{(1)}(t_0) = x_0^{(1)}$$