и конечное состояние в момент T, т.е.

$$x^{(m)}(T)=x_T^{(m)}.$$

Согласно [4] будем считать, что преемственность между системами (1) обеспечивается выполнение условия, что в промежуточные моменты времени t_k, $\quad 1\le k\le m-1$, выполняются равенства

$$E_k x^{(k)}(t_k)+F_k x^{(k+1)}(t_k)=\beta_k, \tag{2}$$

где $E_k, F_k\in R_{n,n}$ – заданные матрицы, а $\beta_k\in R_{n,l}$ – заданный столбец. Кроме этого считаем, что матрица F_k является невырожденной, т.е. $\det F_k\neq 0$.

Определение 1. Составную каузальную систему с промежуточными условиями (2) назовём условно управляемой, если для любого начального состояния $x_0^{(1)}$ и любого конечного состояния $x_T^{(m)}$ найдется набор управлений $u^{(k)}$, $\quad k=\overline{1,m}$, такой, что решение системы, начиная из состояния $x^{(1)}(t_0)=x_0^{(1)}$ и удовлетворяя промежуточным условиям связи (2), в момент времени $t=T$ удовлетворяет условию $x^{(m)}(T)=x_T^{(m)}$.

Для исходной составной каузальной системы построено решение и на основе его доказан критерий её условной управляемости

Литература

1.Yamada T., Luenberger D. G. *Generic Controllability Theorems for Descriptor Systems.* // IEEE Trans. Autom. Control. 1985. Vol. AC-30. № 2. P. 144–152.

2. Размыслович Г. П. *Управляемость каузальных линейных дискретных систем с запаздыванием* // Вест. Белорус. гос. ун-та. Сер.1. 1996. № 3. С. 72–74.

3. Размыслович Г. П, Крахотко В. В. *H-управляемость каузальных дифференциально-алгебраических динамических систем.* // Вест. Белорус. гос. ун-та. Сер.1. 2006. № 1. С. 123–125.

4. Барсегян В. Р. *Управление составных динамических систем.* М.: Наука, 2016.

К МНОГОТОЧЕЧНЫМ ЗАДАЧАМ УПРАВЛЕНИЯ

В. Н. Лаптинский

Изучается задача типа [1] построения возможных управлений класса $\mathbb{C}$ на основе системы соотношений

$$\frac{dx}{dt}=A(t)x+Q(t)u, \tag{1}$$

$$x(t_s)=x_s, \tag{2}$$

$$\int\limits_{a_i}^{b_i}\Psi_i(\tau)x(\tau)d\tau=\mu_i, \tag{3}$$

где $A\in\mathbb{C}\left(I,\mathbb{R}^{n\times n}\right)$, $Q\in\mathbb{C}\left(I,\mathbb{R}^{n\times r}\right)$, $\Psi_i\in\mathbb{C}\left(I,\mathbb{R}^{n\times n}\right)$, $u\in\mathbb{R}^r$, $\mu_i\in\mathbb{R}^n$, $a_i,b_i\in I=$ $=[0,\omega]$, $i=\overline{1,k}$, $s=\overline{0,m}$, $0=t_0<t_1<...<t_m\le\omega$, $\omega>0$.

Задача (1), (2) рассматривалась в [1 и др.], (3) представляет собой обобщение интегральных условий [2 и др.], а при $k=\infty$ – задач [3, с. 264], [4, гл. IX, §5]. Вводятся также матрицы $\Phi_i\in\mathbb{C}\left(I,\mathbb{R}^{n\times n}\right)$, возможно, базисного типа [5, гл. 4] и структурные функции управления $P_s\in\mathbb{C}\left(I,\mathbb{R}^{r\times n}\right)$, в частности $\Phi_i(t)=\Psi_i(t)$.

Сначала рассмотрим задачу (1), (2). Поскольку

$$x(t) = X(t)x_0 + X(t)\int\limits_{t_0}^{t} X^{-1}(\tau)Q(\tau)u(\tau)d\tau, \tag{4}$$

то, согласно (2),

$$\int\limits_{t_0}^{t_s} X^{-1}(\tau)Q(\tau)u(\tau)d\tau = X^{-1}(t_s)x_s - x_0, \tag{5}$$

где $X(t)$ – фундаментальная матрицы однородной (свободной) системы.

Соотношения (5) представляют собой интегральную задачу типа (3). С помощью методики [6, 7], используемой в [2], при выполнении условия невырожденности матриц, определяемых далее по тексту, получим выражение

$$u(t) = G_t(z) + \varphi(t), \tag{6}$$

где $z = z(t)$ – вспомогательная вектор-функция, аналогичная [2], последовательно доопределяемая с сохранением произвола, $G_t(z)$, $\varphi(t)$ – соответственно линейный однородный оператор и функция, конструируемые по алгоритму

$$G_{j+1}(z_{j+1}) = G_j(z_{j+1}) - G_j(P_{j+1})\Big(X^{-1}\widetilde{QG_j(P_{j+1})}\Big)^{-1}\int\limits_{t_0}^{t_{j+1}} P_{j+1}G_j(z_{j+1})d\tau, \tag{7}$$

$$\varphi_{j+1} = \varphi_j + G_j(P_{j+1})\Big(X^{-1}\widetilde{QG_j(P_{j+1})}\Big)^{-1}\left[X^{-1}(t_{j+1})x_{j+1} - x_0 - \int\limits_{t_0}^{t_{j+1}} P_{j+1}\varphi_j d\tau\right], \tag{8}$$

$j = \overline{0, m-1}$, тильдой сверху обозначен интеграл по промежутку $[t_0,\ t_j]$, при этом $G_0(z_1) = z_1$, $G_0(P_1) = P_1$, $\varphi_0 = 0$, $G_m(z_m) = G_t(z)$, $\varphi_m = \varphi(t)$, $z_m = z$,

$$\det\Big(X^{-1}\widetilde{QG_j(P_{j+1})}\Big) \neq 0, \quad j = \overline{0, m-1}. \tag{9}$$

Выполнение условия (9) обеспечивает реализуемость процесса построения $G_t(z)$, $\varphi(t)$ начиная с $G_1(z_1) = z_1 - P_1\Big(\widetilde{X^{-1}QP_1}\Big)^{-1}\int_{t_0}^{t_1} X^{-1}Qz_1 d\tau$, $\varphi_1 = P_1\Big(\widetilde{X^{-1}QP_1}\Big)^{-1}\times$ $\times\,[X^{-1}(t_1)x_1 - x_0]$.

Соотношение (6) принимаем за основу при рассмотрении системы (3). На основании (4), (6) имеем

$$x(t) = X(t)x_0 + X(t)\int\limits_{t_0}^{t} X^{-1}(\tau)Q(\tau)\left[G_\tau(z) + \varphi(\tau)\right]d\tau. \tag{10}$$

Подставляя (10) в (3), получим

$$\int\limits_{a_i}^{b_i} X(\tau)d\tau\int\limits_{t_0}^{\tau} X^{-1}(s)Q(s)G_s(z)ds = \mu_i - \int\limits_{a_i}^{b_i} X(\tau)\left[x_0 + \int\limits_{t_0}^{\tau} X^{-1}(s)Q(s)\varphi(s)ds\right]d\tau.$$

Отсюда, используя $\Phi_i(t)$ и произвол функции z, по методике [6, 7] получим

$$z = K_t(y) + g(t), \tag{11}$$

где y, $K_t(y)$, $g(t)$ – величины типа [2], аналогичные принятым в (6).

Подставляя (11) в (6), получаем

$$u(t) = G_t(K_\tau(y) + g(\tau)) + \varphi(t). \tag{12}$$

Используя (12), имеем на основе (4)

$$x(t) = X(t)x_0 + X(t)\int\limits_{t_0}^{t} X^{-1}(\tau)Q(\tau)\left[G_\tau(K_s(y) + g(s)) + \varphi(\tau)\right]d\tau. \tag{13}$$

Замечание. Произвол функции $y(t)$ может быть использован при решении задач оптимизации. Описанный подход эффективен для решения других многоточечных задач управления [1, 8, 9 и др.].

Для иллюстрации применения алгоритма рассмотрим задачу

$$\frac{dx}{dt} = u, \quad x(0) = 3, \quad x(2) = 4, \quad \int\limits_0^2 x(\tau)d\tau = 0.$$

На основе приведенных соотношений имеем последовательно

$$u = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\int\limits_0^2 z(\tau)d\tau + z, \quad z = y + \frac{3}{2}t\int\limits_0^2 (1-\tau)y(\tau)d\tau + \frac{21}{2}t,$$

$$x = 3 - 10t + \frac{21}{4}t^2 + \int\limits_0^t yd\tau + \left(\frac{3}{4}t^2 - 2t\right)\int\limits_0^2 yd\tau + \frac{3}{4}t\,(2-t)\int\limits_0^2 \tau yd\tau.$$

Далее рассмотрим задачу

$$\frac{dx}{dt} = u, \quad x(0) = 3, \quad x(1) = 2, \quad x(2) = 4.$$

Аналогично получим

$$u = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\int\limits_0^2 z(\tau)d\tau + z, \quad z = y + \left(3 + 2\int\limits_0^1 yd\tau - \int\limits_0^2 yd\tau\right)t,$$

$$x(t) = \widetilde{x}(t) + \left(\frac{1}{2}\int\limits_0^2 yd\tau - 2\int\limits_0^1 yd\tau\right)t + \left(\int\limits_0^1 yd\tau - \frac{1}{2}\int\limits_0^2 yd\tau\right)t^2 + \int\limits_0^t yd\tau,$$

$$\widetilde{x}(t) = 3 - \frac{5}{2}t + \frac{3}{2}t^2.$$

Выводы. Разработан алгоритм построения $u(t)$ и соответствующей функции состояний $x(t)$ – формулы (12), (13). Дана необходимая иллюстрация.

Литература

1. Лаптинский В. Н. *Об одной многоточечной задаче управления* // X Белорусская математическая конференция: Тез. докл. Междунар. науч. конф., Минск, 3 – 7 ноября 2008 г. Ч. 3. Мн.: Ин-т матем. НАН Беларуси, 2008. С. 103.

2. Лаптинский В.Н. *Об одной дифференциальной задаче с условиями интегрального типа* // XX Международная научная конференция по дифференциальным уравнениям (Еругинские чтения-2022). Материалы Междунар. науч. конф. В 2-х частях. Новополоцк, 2022. С. 61-63.

3. Канторович Л.В., Акилов Г.П. *Функциональный анализ.* М. : Наука, 1977.

4. Канторович Л. В., Вулих Б. З., Пинскер А. Г. *Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах.* М.-Л.: Гостехиздат, 1950.

5. Лаптинский В. Н. *Конструктивный анализ управляемых колебательных систем.* Мн.: ИМ НАН Беларуси, 1998.

6. Лаптинский В. Н. *К методике решения одной задачи теории гильбертовых пространств* // IX Белорусская математическая конференция: материалы Междунар. конф. Ч. 1. Гродно: ГрГУ, 2004. С. 81-82.

7. Лаптинский В. Н. *Об одной задаче теории векторных пространств* // X Белорусская математическая конференция: Тез. докл. Междунар. науч. конф., Минск, 3 – 7 ноября 2008 г. Ч. 3. Мн.: Ин-т матем. НАН Беларуси, 2008. С. 65.

8. Лаптинский В. Н. *Об одной задаче управления* // Еругинские чтения XI. Тез. докл. междунар. мат. конф. Гомель, 2006. Мн.: Ин-т матем. НАН Бела-руси, 2006. С. 83.

9. Лаптинский В. Н. *Методика решения одной задачи управления для векторной системы второго порядка* // Пятые Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям: тезисы докл. Междунар. матем. конф., Минск, 7 - 10 декабря 2010 г. – Минск : Ин-т матем. НАН Беларуси, 2010. С. 131.

ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ЗАПАЗДЫВАЮЩЕГО ТИПА

В.В. Малыгина

Рассмотрим систему линейных автономных дифференциальных уравнений

$$\dot{x}(t) + Ax(t) + \int_0^r dR(s)\,x(t-s) = \int_0^p dP(s)\,x(t-s) + f(t), \quad t \geq 0, \tag{1}$$

где $r, p > 0$, A — постоянная $n \times n$-матрица, R, P — $n \times n$-матрицы-функции ограниченной вариации, f — локально-суммируемая вектор-функция. Интегралы понимаются в смысле Римана — Стилтьеса, что позволяет учитывать как сосредоточенное, так и распределенное запаздывание. Начальную функцию, не нарушая общности, можно считать частью внешнего возмущения f. В указанных предположениях система (1) с заданными начальными условиями $x(0) \in \mathbb{R}^n$ однозначно разрешима в классе локально абсолютно непрерывных функций и ее решение представимо в виде [1]

$$x(t) = X(t)x(0) + \int_0^t X(t-s)f(s)ds, \quad t \geq 0. \tag{2}$$

Матрица-функция X называется *фундаментальной матрицей* системы (1). Из (2) следует, что поведение любого решения системы (1) полностью определяется свойствами фундаментальной матрицы.