

## Литература

1. Лаптинский В. Н. *Об одной многоточечной задаче управления* // X Белорусская математическая конференция: Тез. докл. Междунар. науч. конф., Минск, 3 – 7 ноября 2008 г. Ч. 3. Мн.: Ин-т матем. НАН Беларуси, 2008. С. 103.
2. Лаптинский В.Н. *Об одной дифференциальной задаче с условиями интегрального типа* // XX Международная научная конференция по дифференциальным уравнениям (Еругинские чтения-2022). Материалы Междунар. науч. конф. В 2-х частях. Новополоцк, 2022. С. 61-63.
3. Канторович Л.В., Акилов Г.П. *Функциональный анализ*. М. : Наука, 1977.
4. Канторович Л. В., Вулих Б. З., Пинскер А. Г. *Функциональный анализ в полупорядоченных пространствах*. М.-Л.: Гостехиздат, 1950.
5. Лаптинский В. Н. *Конструктивный анализ управляемых колебательных систем*. Мн.: ИМ НАН Беларуси, 1998.
6. Лаптинский В. Н. *К методике решения одной задачи теории гильбертовых пространств* // IX Белорусская математическая конференция: материалы Междунар. конф. Ч. 1. Гродно: ГрГУ, 2004. С. 81-82.
7. Лаптинский В. Н. *Об одной задаче теории векторных пространств* // X Белорусская математическая конференция: Тез. докл. Междунар. науч. конф., Минск, 3 – 7 ноября 2008 г. Ч. 3. Мн.: Ин-т матем. НАН Беларуси, 2008. С. 65.
8. Лаптинский В. Н. *Об одной задаче управления* // Еругинские чтения XI. Тез. докл. междунар. мат. конф. Гомель, 2006. Мн.: Ин-т матем. НАН Беларуси, 2006. С. 83.
9. Лаптинский В. Н. *Методика решения одной задачи управления для векторной системы второго порядка* // Пятые Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям: тезисы докл. Междунар. матем. конф., Минск, 7 - 10 декабря 2010 г. – Минск : Ин-т матем. НАН Беларуси, 2010. С. 131.

## ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ЗАПАЗДЫВАЮЩЕГО ТИПА

В.В. Малыгина

Рассмотрим систему линейных автономных дифференциальных уравнений

$$\dot{x}(t) + Ax(t) + \int_0^r dR(s) x(t-s) = \int_0^p dP(s) x(t-s) + f(t), \quad t \geq 0, \quad (1)$$

где  $r, p > 0$ ,  $A$  — постоянная  $n \times n$ -матрица,  $R, P$  —  $n \times n$ -матрицы-функции ограниченной вариации,  $f$  — локально-суммируемая вектор-функция. Интегралы понимаются в смысле Римана — Стильтьеса, что позволяет учитывать как сосредоточенное, так и распределенное запаздывание. Начальную функцию, не нарушая общности, можно считать частью внешнего возмущения  $f$ . В указанных предположениях система (1) с заданными начальными условиями  $x(0) \in \mathbb{R}^n$  однозначно разрешима в классе локально абсолютно непрерывных функций и ее решение представимо в виде [1]

$$x(t) = X(t)x(0) + \int_0^t X(t-s)f(s)ds, \quad t \geq 0. \quad (2)$$

Матрица-функция  $X$  называется *фундаментальной матрицей* системы (1). Из (2) следует, что поведение любого решения системы (1) полностью определяется свойствами фундаментальной матрицы.

Систему (1) назовем *экспоненциально устойчивой*, если при некоторых положительных  $N, \alpha > 0$  для всех  $t \geq 0$  справедлива оценка  $|X(t)| \leq N \exp(-\alpha t)$ .

Левая часть (1) определяет специально выделенную «систему сравнения»

$$\dot{x}(t) + Ax(t) + \int_0^r dR(s)x(t-s) = f(t), \quad t \geq 0, \quad (3)$$

которую стремятся выбрать так, чтобы она имела более простую структуру, чем исходная система, но при этом ее решения обладали сходными с (1) асимптотическими свойствами. Эта схема («метод сравнения») успешно использовалась многими исследователями [2, 3, 4], но в большей части работ в качестве системы сравнения выбиралась система обыкновенных дифференциальных уравнений с диагональной матрицей  $A$ . Очевидно, что в этом случае фундаментальная матрица также является диагональной и имеет вид  $e^{-At}$ , что существенно упрощает исследование.

Отметим, однако, что дифференциальные уравнения с «малым» запаздыванием по свойствам близки к обыкновенным: если их решения стремятся к нулю, то только по экспоненциальному закону; они не выражаются явно через элементарные функции, но допускают точные двусторонние оценки [5, 6]. Это делает возможным выбор в качестве систем сравнения системы вида (3) с ненулевой матрицей  $R$ , что существенно расширяет возможности метода.

Пусть  $A = \text{diag}\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ , где  $a_k \in \mathbb{R}$ ,  $R(s) = \text{diag}\{r_1(s), r_2(s), \dots, r_n(s)\}$ , где каждая из функций  $r_k$  — неубывающая функция,  $k = \overline{1, n}$ ;  $P$  — неубывающая матрица-функция.

**Теорема 1.** Пусть система (3) экспоненциально устойчива, а ее фундаментальная матрица положительна. Тогда для фундаментальной матрицы системы (1) справедлива двусторонняя оценка

$$0 \leq X(t) \leq N \exp(-\alpha t), \quad t \geq 0, \quad (4)$$

если и только если матрица  $A + \int_0^r dR(s) - \int_0^p dP(s)$  обратима и

$$\left( A + \int_0^r dR(s) - \int_0^p dP(s) \right)^{-1} \geq 0.$$

Теорема 1 дает эффективный критерий экспоненциальной устойчивости системы (1), если располагать соответствующей информацией о системе сравнения. В силу сказанного выше матрицы  $A$  и  $R$  предполагаются диагональными, следовательно, систему (3) можно рассматривать как совокупность независимых скалярных уравнений, для которых вопрос о положительности фундаментального решения и экспоненциальной устойчивости достаточно хорошо изучен. Приведем здесь эффективно проверяемый критерий, который обеспечивает точную двустороннюю оценку фундаментального решения.

Рассмотрим скалярное уравнение вида (3)

$$\dot{x}(t) + ax(t) + \int_0^r x(t-s)dr(s) = f(t), \quad t \geq 0, \quad (5)$$

обозначим  $F(\lambda) = \lambda + a + \int_0^r e^{-\lambda s} dr(s)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ , характеристическую функцию уравнения (5), через  $x_0$  — его фундаментальное решение.

**Теорема 2** [5]. Пусть  $a \in \mathbb{R}$ ,  $r_k$  — неубывающая функция. Фундаментальное решение уравнения (5) имеет двустороннюю оценку

$$e^{-\omega t} \leq x_0(t) \leq \frac{1}{F'(-\omega)} e^{-\omega t}, \quad t \geq 0,$$

тогда и только тогда, когда  $F(-\omega) = 0$ ,  $F'(-\omega) > 0$  при  $\omega > 0$ .

Заметим, что теорема 2 дает точный показатель экспоненты и неулучшаемое значение коэффициента, на основе которых удастся оценить  $N, \alpha$  в оценке (4).

Работа выполнена при финансовой поддержке при поддержке Минобрнауки РФ (госзадание FSNM-2023-0005).

### Литература

1. Азбелев Н. В., Максимов В. П., Рахматуллина Л. Ф. Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1991.
2. Мартынюк А. А., Оболенский А. Ю. Об устойчивости решений автономных систем Вазжевского // Дифференц. уравнения. 1980. Т. 16. № 8. С. 1392–1407.
3. Перцев Н. В. Применение  $M$ -матриц для построения экспоненциальных оценок решений задачи Коши для некоторых систем линейных разностных и дифференциальных уравнений // Мат. тр. 2013. Т. 16. № 2. С. 111–141.
4. Györi I. Interaction between oscillations and global asymptotic stability in delay differential equations // Differential Integral Equations. 1990. V. 3. № 1. P. 1811–200.
5. Малыгина В. В. Оценка показателя экспоненты для устойчивых решений одного класса дифференциально-разностных уравнений // Изв. вузов. Матем. 2021. № 12. С. 67–79.
6. Малыгина В. В., Чудинов К. М. О точных двусторонних оценках устойчивых решений автономных функционально-дифференциальных уравнений // Сиб. матем. журн. 2022. Т. 63. № 2. С. 360–378.

## АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ НЕАВТОНОМНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

И.И. Матвеева

Рассматриваются некоторые классы систем неавтономных функционально-дифференциальных уравнений с переменным запаздыванием. Исследованы асимптотические свойства решений на полупрямой и получены оценки, характеризующие скорость стабилизации решений на бесконечности. Работа продолжает наши исследования свойств решений неавтономных уравнений с запаздыванием (см., например, [1–3]).

Работа выполнена в рамках государственного задания Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН (проект № FWNF-2022-0008).

### Литература

1. Матвеева И. И. Оценки решений класса неавтономных систем нейтрального типа с неограниченным запаздыванием // Сибирский математический журнал. 2021. Т. 62. № 3. С. 583–598.
2. Matveeva I. I. Estimates for solutions to one class of nonlinear nonautonomous systems with time-varying concentrated and distributed delays // Siberian Electronic Mathematical Reports. 2021. V. 18. № 2. P. 1689–1697.
3. Matveeva I. I. Estimates for solutions to a class of nonlinear time-varying delay systems // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2021. V. 42. № 14. P. 3497–3504.