К МЕТОДАМ КОРРЕКТИРОВКИ ПАРАМЕТРОВ ЛИНЕЙНОЙ ЦЕЛЕВОЙ ФУНКЦИИ ДЛЯ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ОБРАТНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Л.А Пилипчук

Обратная задача оптимизации с нормой l_p состоит в том, чтобы определить вектор стоимости $\widetilde{c}$ такой, что выбранный вектор x_0 является оптимальным решением $P(\widetilde{c}) = = min\{\widetilde{c}x : x \in Z\}$. Другими словами,необходимо заменить вектор стоимости c на вектор $\widetilde{c}$ так, чтобы x_0 являлся оптимальным решением относительно возмущенного вектора стоимости $\widetilde{c}$, а стоимость возмущения при этом была бы минимальна.

Рассмотрим линейную задачу сетевой оптимизации однородного потока в обобщенной сети с вложенной сетевой структурой ограничений и преобразованием дуговых потоков

$$f(x) = \sum_{(i,j)\in U} c_{ij}x_{ij} + \sum_{i\in I^*} c_i x_i \longrightarrow \min, \tag{1}$$

$$\sum_{j\in I_i^+(U)} x_{ij} - \sum_{j\in I_i^-(U)} \mu_{ji}x_{ji} = x_i, i \in I^*, \sum_{j\in I_i^+(U)} x_{ij} - \sum_{j\in I_i^-(U)} \mu_{ji}x_{ji} = a_i, i \in I \setminus I^*, \tag{2}$$

$$\sum_{(i,j)\in U} \lambda_{ij}^p x_{ij} + \sum_{i\in I^*} \lambda_i^p x_i = \alpha_p, \, p = \overline{1,l}, \tag{3}$$

$$0 \le x_{ij} \le d_{ij}, \ (i,j) \in U, \ b_{*i} \le x_i \le b_i^*, \, i \in I^*, \tag{4}$$

где $G = (I, U)$ – связный конечный ориентированный граф, I^* – множество узлов с неизвестным внешним потоком $x_i, \, i \in I^*$, $x = (x_{ij}, (i,j) \in U; x_i, \, i \in I^*)$ – вектор дуговых и внешних потоков графа G, c_{ij}, c_i, μ_{ij}, a_i, λ_{ij}^p, λ_i^p, α_p, d_{ij}, b_{*i}, b_i^* – известные параметры задачи (1) – (4), $I_i^+(U) = \{j \in I : (i,j) \in U\}$, $I_i^-(U) = \{j \in I : (j,i) \in U\}$. Параметры линейной целевой функции (1) являются неточными данными.

Вектор $x = (x_{ij}, (i,j) \in U; x_i, \, i \in I^*)$ – допустимое решение экстремальной задачи (1) – (4) (выполняются ограничения (2) – (4)), $x \in Z$.

Математическая модель двойственной задачи к (1) – (4) имеет вид:

$$\sum_{i\in I\setminus I^*} a_i y_i + \sum_{p=1}^{l} \alpha_p r_p + \sum_{i\in I^*} b_{*i} w_i - \sum_{i\in I^*} b_i^* t_i - \sum_{(i,j)\in U} d_{ij} v_{ij} \longrightarrow \max, \tag{5}$$

$$y_i - \mu_{ij} y_j + \sum_{p=1}^{l} \lambda_{ij}^p r_p - v_{ij} \le c_{ij}, \ v_{ij} \ge 0, \ (i,j) \in U, \tag{6}$$

$$-y_i + \sum_{p=1}^{l} \lambda_i^p r_p + w_i - t_i = c_i, \ w_i \ge 0, \ t_i \ge 0, \ I^*, \tag{7}$$

вектор $\lambda = (y, r, w, t, v)$ – допустимое решение двойственной задачи (выполняются ограничения (6) – (7)), $\lambda \in \Lambda$ состоит из векторов $y = (y_i, i \in I)$, $r = (r_p, \ p = \overline{1,l})$, $w = (w_i, i \in I^*)$, $t = (t_i, i \in I^*)$, $v = (v_{ij}, (i,j) \in U)$.

Теорема 1. *Пусть* $x^0 = (x_{ij}^0, \ (i,j) \in U; \ x_i^0, \ i \in I^*)$ *– некоторое известное допустимое решение задачи (1) – (4),* $x^0 \in Z$ *и* $\lambda = (y, r, w, t, v)$ *– допустимое решение* *двойственной задачи (5) – (7),* $\lambda \in \Lambda$ *. Если для некоторого допустимого решения* $\lambda = (y, r, w, t, v)$ *,* $\lambda \in \Lambda$ *двойственной задачи (5) – (7) выполняются условия:* $(y_i - \mu_{ij} y_j + \sum_{p=1}^{l} \lambda_{ij}^p r_p - v_{ij} - c_{ij}) x_{ij}^0 = 0, (i,j) \in U$; $(d_{ij} - x_{ij}^0) v_{ij} = 0, (i,j) \in U$; $(x_i^0 - b_{*i}) w_i = 0, i \in I^*$; $(b_i^* - x_i^0) t_i = 0, i \in I^*$, *то известное допустимое решение* x^0 *является оптимальным решением задачи (1) – (4).*

Пусть известно одно из допустимых решений x^0 задачи (1) – (4), $x^0 \in Z$. Требуется минимально изменить коэффициенты целевой функции (1), чтобы выбранное допустимое решение x^0 стало оптимальным. Для корректировки параметров линейной целевой функции (1) применим принципы обратной оптимизации [1] – [2]. Обозначим через γ_{ij}, β_{ij} соответственно увеличение и уменьшение параметра c_{ij}, $(i,j) \in U$ и γ_i, β_i соответственно увеличение и уменьшение параметра c_i, $i \in I^*$ целевой функции (1). При этом, γ_{ij} и β_{ij} не могут одновременно принимать положительные значения: $\widetilde{c}_{ij} = c_{ij} + \gamma_{ij} - \beta_{ij}$, $\gamma_{ij} \geq 0$, $\beta_{ij} \geq 0$, $\gamma_{ij}\beta_{ij} = 0$, $(i,j) \in U$. Кроме этого, положим $\widetilde{c}_i = c_i + \gamma_i - \beta_i$, $\gamma_i \geq 0$, $\beta_i \geq 0$, при этом, γ_i и β_i одновременно не могут принимать положительные значения: $\widetilde{c}_i = c_i + \gamma_i - \beta_i, i \in I^*$, $\gamma_i \geq 0, \beta_i \geq 0$, $\gamma_i \beta_i = 0, i \in I^*$.

Найти такие коэффициенты $\widetilde{c} = (\widetilde{c}_{ij}, (i,j) \in U; \widetilde{c}_i, i \in I^*)$ для которых известное допустимое решение $x^0 \in Z$ является оптимальным решением экстремальной задачи с целевой функцией: $f(x^0) = \sum_{(i,j)\in U} \tilde{c}_{ij} x_{ij}^0 + \sum_{i\in I^*} \tilde{c}_i x_i^0 \longrightarrow \min$, и ограничениями (2) – (4).

Построим математическую модель процесса корректировки параметров линейной целевой функции (1). Мера близости векторов c и $\widetilde{c}$ оценивается с помощью нормы $l_p, p = 1$, что позволяет оставаться в рамках линейного программирования. Общая корректировка параметров целевой функции является минимальной в соответствии с нормой l_1:

$$l_1 = \sum_{(i,j)\in U} |\widetilde{c}_{ij} - c_{ij}| + \sum_{i\in I^*} |\widetilde{c}_i - c_i| = \sum_{(i,j)\in U} |\gamma_{ij} - \beta_{ij}| + \sum_{i\in I^*} |\gamma_i - \beta_i| =$$

$$\sum_{(i,j)\in U} (\gamma_{ij} + \beta_{ij}) + \sum_{i\in I^*} (\gamma_i + \beta_i).$$

В зависимости от численных значений допустимого решения x^0 задачи (1) – (4) на основании теоремы 1 сформируем множества: $B_1 = \{(i,j) \in U : x_{ij}^0 = 0\}$, $B_2 = \{(i,j) \in U : x_{ij}^0 = d_{ij}\}$, $B_3 = \{(i,j) \in U : 0 < x_{ij}^0 < d_{ij}\}$, $R_1 = \{i \in I^* : x_i^0 = b_{*i}\}$, $R_2 = \{i \in I^* : x_i^0 = b_i^*\}$, $R_3 = \{i \in I^* : b_{*i} < x_i^0 < b_i^*\}$.

Обратная задача для определения минимальных изменений $\gamma = (\gamma_{ij}, (i,j) \in U; \gamma_i, i \in I^*)$, $\beta = (\beta_{ij}, (i,j) \in U; \beta_i, i \in I^*)$ параметров стоимости c линейной целевой функции (1) и нахождения возмущенного вектора $\widetilde{c}$ такого, что x_0 является оптимальным решением и стоимость возмущения при этом минимальна, имеет вид:

$$q(\gamma, \beta) = l_1 = \sum_{(i,j)\in U} (\gamma_{ij} + \beta_{ij}) + \sum_{i\in I^*} (\gamma_i + \beta_i) \longrightarrow \min,$$

$y_i - \mu_{ij} y_j + \sum_{p=1}^{l} \lambda_{ij}^p r_p \leq c_{ij} + \gamma_{ij} - \beta_{ij}$, $\gamma_{ij} \geq 0, \beta_{ij} \geq 0$, $(i,j) \in B_1$; $y_i - \mu_{ij} y_j + \sum_{p=1}^{l} \lambda_{ij}^p r_p - v_{ij} = c_{ij} + \gamma_{ij} - \beta_{ij}$, $v_{ij} \geq 0$, $\gamma_i \geq 0$, $\beta_i \geq 0$, $(i,j) \in B_2$; $y_i - \mu_{ij} y_j + \sum_{p=1}^{l} \lambda_{ij}^p r_p = c_{ij} + \gamma_{ij} - \beta_{ij}$, $\gamma_{ij} \geq 0$, $\beta_{ij} \geq 0$, $(i,j) \in B_3$; $y_i + \sum_{p=1}^{l} \lambda_{ij}^p r_p + w_i = c_i + \gamma_i - \beta_i$, $w_i \geq 0, \gamma_i \geq 0$, $\beta_i \geq 0$, $i \in R_1$; $y_i + \sum_{p=1}^{l} \lambda_{ij}^p r_p - t_i = c_i + \gamma_i - \beta_i$, $t_i \geq 0$, $\gamma_i \geq 0$, $\beta_i \geq 0$, $i \in R_2$; $-y_i + \sum_{p=1}^{l} \lambda_{ij}^p r_p = c_i + \gamma_i - \beta_i$, $\gamma_i \geq 0$, $\beta_i \geq 0$, $i \in R_3$.

Выбранное допустимое решение $x^0 \in Z$ задачи (1) – (4) является оптимальным решением экстремальной задачи сетевой оптимизации с целевой функцией

$$\sum_{(i,j)\in U}(c_{ij}+\gamma_{ij}-\beta_{ij})x_{ij}+\sum_{i\in I^*}(c_i+\gamma_i-\beta_i)x_i\longrightarrow\min$$

и ограничениями (2) – (4).

Литература

1. Ahuja R. K., Orlin J. B. *Inverse Optimization* // Operations Research. 2001. Vol. 49. No. 5. P. 771 – 783.

2. Pilipchuk L. A., Pilipchuk A. S. *Modeling parameters of the lower and upper bounds and parameters of the objective function for generalized network flow programming problems* // American Institute of Physics, AIP Conf. Proc.. 2015. Vol. 1690. 060007. doi: 10.1063/1.4936745, – 10 p.

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИ НАБЛЮДАЕМЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-АЛГЕБРАИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

В.Е. Хартовский

Объект исследования — линейная автономная дифференциально-алгебраическая система с последействием

$$\frac{d}{dt}\left(Dx(t)\right)=\sum_{i=0}^{m}A_ix(t-ih),\quad t>0,\tag{1}$$

$$y(t)=\sum_{i=0}^{m}C_ix(t-ih),\quad t>0,\tag{2}$$

где x — решение уравнения (1), y — наблюдаемый выход; $h=\mathrm{const}>0$, $D,A_i,\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $C_i\in\mathbb{R}^{r\times n}$. Считаем, что в начальном условии $x(t)=\eta(t),\,t\in[-mh,0]$, начальная функция $\eta\in\mathbf{PC}_D$ неизвестна. Здесь для произвольной матрицы $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ запись $\mathbf{PC}_A=\mathbf{PC}_A([-mh,0],\mathbb{R}^n)$ обозначает множество кусочно-непрерывных функций $\eta:[-mh,0]\to\mathbb{R}^n$ таких, что функция $A\eta$ непрерывна.

Обозначим $\operatorname{rank}D=n_1$, $n_2=n-n_1$. Систему (1) назовем вполне регулярной, если $\deg|pD-A_0|=n_1$. Далее будем изучать только вполне регулярные системы (1).

Один и тот же выход $y(t),\,t>0$, может порождаться различными начальными функциями $\eta\in\mathbf{PC}_D\big([-mh,0],\mathbb{R}^n\big)$. Поэтому одному и тому же выходу $y(t),\,t>t_0\,(t_0\geqslant0)$, может соответствовать множество решений $x(t),\,t>t_0$, уравнения (1). Каждое такое решение $x(t),\,t>t_0$, будем называть *совместимым* с выходом $y(t),\,t>t_0$.

Определение 1. Систему (1), (2) будем называть асимптотически наблюдаемой, если для любых двух решений x^1 и x^2 уравнения (1), совместимых с выходами y^1 и y^2 соответственно, выполняется условие: если $y^1(t)\equiv y^2(t),\,t>t_1\,(\exists\,t_1>0)$, то $\|x^1(t)-x^2(t)\|_{\mathbb{R}^n}\to0$ при $t\to+\infty$.

Замечание 1. Легко видеть, что определение 1 равносильно тому, что $\|x(t)\|_{\mathbb{R}^n}\to0$ при $t\to+\infty$ для всех решений системы, совместимых с нулевым выходом $y(t)\equiv0,\,t>t_1\,(\exists\,t_1>0)$.

Рассмотрим систему (1), (2). Обозначим $W(p,\lambda)=Dp-A(\lambda)$, $A(\lambda)=\sum\limits_{i=0}^{m}\lambda^iA_i$, $C(\lambda)=\sum\limits_{i=0}^{m}\lambda^iC_i$. Введем множество $P_C=\left\{p\in\mathbb{C}\,:\,\operatorname{rank}\begin{bmatrix}W(p,e^{-ph})\\C(e^{-ph})\end{bmatrix}<n\right\}$.