3. Детченя, Л. В. *Необходимые условия наличия свойства Пенлеве для системы дифференциальных уравнений второго порядка второй степени специального вида* / Л. В. Детченя, Е. Е. Кулеш, В. М. Пецевич // Веснік ГрДУ імя Янкі Купалы. Сер. 2, Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. 2020. Т. 10. № 2. С. 30–35.

4. Детченя, Л. В. *Необходимые условия наличия свойства Пенлеве у дифференциальной системы второго порядка* / Л. В. Детченя, Е. Е. Кулеш, В. М. Пецевич // Седьмые Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям, посвящ. 100-летию со дня рождения проф. Ю.С. Богданова : материалы Междунар. математической конф., Минск, 1-4 июля 2021 г. Минск : Ин-т математики НАН Беларуси. 2021. С. 59–60.

5. Ванькова, Т. Н. *Свойство Пенлеве для одной дифференциальной системы второго порядка* / Т. Н. Ванькова, Е. Е. Кулеш, В. М. Пецевич // Еругинские чтения – 2022. В 2 ч. Ч.1. XX Международная научная конференция по дифференциальным уравнениям : материалы Междунар. науч. конф. Новополоцк, 31 мая – 3 июня 2022 г. Новополоцк : Полоцкий гос. ун-т. 2022. С. 5–7.

6. Пецевич, В. М. *Необходимые условия наличия свойства Пенлеве у системы двух дифференциальных уравнений второй степени* / В. М. Пецевич, В. А. Пронько // Проблемы физики, математики и техники. 2018. № 2(35). С. 69–75.

7. Пецевич, В. М. *Свойство Пенлеве для дифференциальной системы второго порядка* / В. М. Пецевич, Д. Н. Шевченя // Проблемы физики, математики и техники. 2016. № 1(26). С. 48–51.

# О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ШЕСТОГО ПОРЯДКА

**Е. Е. Кулеш, И. П. Мартынов, В. М. Пецевич**

В работе [1] получены семь обыкновенных дифференциальных уравнений пятого порядка со свойством Пенлеве. В рамках решения задачи классификации дифференциальных уравнений в частных производных шестого порядка по свойству Пенлеве будем строить на основе этих ОДУ дифференциальные уравнения в частных производных и исследовать их на наличие свойства Пенлеве. В работах [2–5] исследованы три из них.

Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение со свойством Пенлеве

$$y^{(5)}+4yy^{(4)}+14y'y'''+6y^2y'''+10(y'')^2+36yy'y''+4y^3y''+12(y')^3+12y^2(y')^2=0.$$

Построим на его основе дифференциальное уравнение в частных производных

$$\begin{gathered}(w_{xxxxx}+4ww_{xxxx}+14w_xw_{xxx}+6w^2w_{xxx}+10w_{xx}^2+36ww_xw_{xx}+\\+4w^3w_{xx}+12w_x^3+12w^2w_x^2)_x=F,\end{gathered}\tag{1}$$

где $w=w(x,t)$, $F$ содержит слагаемые меньшего веса с производными по $x$ и по $t$ с аналитическими коэффициентами от $(x,t)$. Общий вид $F$ можно посмотреть в работе [5]. Ставится задача исследовать уравнение (1) на наличие свойства Пенлеве [6] и исследовать некоторые аналитические свойства его решений.

Резонансная структура уравнения (1) описывается наборами $(s,u_0;r_1,...,r_n)$:

$$(1,1;-1,1,2,4,5,6),(1,2;-1,-2,1,4,5,6),(1,3;-1,-2,-3,4,5,6).$$

**Теорема 1**. *Чтобы уравнение* (1) *имело свойство Пенлеве, необходимо, чтобы оно* *имело вид*

$$
\begin{gathered}
w_{xxxxxx}+4ww_{xxxxx}+18w_xw_{xxxx}+6w^2w_{xxxx}+34w_{xx}w_{xxx}+48ww_xw_{xxx}+\\
+4w^3w_{xxx}+36ww_{xx}^2+72w_x^2w_{xx}+36w^2w_xw_{xx}+24ww_x^3=Aw_{xxxxx}+Bw_{xxxxt}+\\
+4w(Aw_{xxxx}+Bw_{xxxt})+6w^2(Aw_{xxx}+Bw_{xxt})+14Aw_xw_{xxx}+10Bw_xw_{xxt}+\\
+4Bw_tw_{xxx}+10w_{xx}(Aw_{xx}+Bw_{xt})+12ww_x(3Aw_{xx}+2Bw_{xt})+12ww_tw_{xx}+\\
+4w^3(Aw_x+Bw_{xt})+12(w_x^2+w^2w_x)(Aw_x+Bw_t)+Cw_{xxxx}+Gw_{xxxt}+\\
+2w((2C+E)w_{xxx}+2Gw_{xxt})+2(5C+2E)w_xw_{xx}+6Gw_xw_{xt}+4Gw_tw_{xx}+\\
+6w^2((C+E)w_{xx}+Gw_{xt})+4(w^3+3ww_x)((C+E)w_x+Gw_t)+Kw_{xxx}+\\
+BEw_{xxt}+2w(AE-3E_x+2K+2L)w_{xx}+2BEww_{xt}+2BEw_xw_t+\\
+(2AE-6E_x+3K+3L)w_x^2+6(K+L)w^2w_x+(K+L)w^4+\\
+(A(AE+L-E_x)-3(AE+L-2E_x)_x+BE_t+E(C+E))w_{xx}+\\
+(B(AE+L-2E_x)+EG)w_{xt}+2(2AE_x+BE_t+E(C+E)-3E_{xx})ww_x+\\
+2(BE_x+EG)ww_t+(2A(AE+L-2E_x)_x+B(AE+L-2E_x)_t+\\
+(C+E)(AE+L-2E_x)-3(AE+L-2E_x)_{xx}+2E_{xxx}-AE_{xx}+GE_t+\\
+E(K+L))w_x+(G(AE+L-3E_x)+B(AE+L-3E_x)_x)w_t+(AE_{xx}+\\
+BE_{xt}+E_x(C+E)+GE_t+E(K+L)-E_{xxx})w^2+(A(AE+L-3E_x)_{xx}+\\
+B(AE+L-3E_x)_{xt}+(C+E)(AE+L-3E_x)_x+G(AE+L-3E_x)_t+\\
+(K+L)(AE+L-3E_x)-(AE+L-3E_x)_{xxx})w+M,
\end{gathered}
\tag{2}
$$

*где* $A,B,C,E,G,K,L,M$ *— аналитические функции от* $(x,t)$.

**Теорема 2**. *Уравнение (2) заменой*

$$u=w_{xxx}+4ww_{xx}+3w_x^2+6w^2w_x+w^4+E(w_x+w^2)+(AE+L-3E_x)w$$

*сводится к линейному уравнению*

$$u_{xxx}=Au_{xx}+Bu_{xt}+(C+E)u_x+Gu_t+(K+L)u+M.$$

**Теорема 3**. *Если функция* $\varphi$ *удовлетворяет условию*

$$\varphi_{xxxx}+E\varphi_{xx}+(AE+L-3E_x)\varphi_x=0,$$

*то функция* $w(x,t)=\dfrac{\varphi_x}{\varphi}$ *является решением уравнения (2) при* $M=0$.

**Следствие 1**. *При* $E=L=M=0$ *уравнение (2) имеет решение*

$$w(x,t)=\frac{3a(t)x^2+2b(t)x+c(t)}{a(t)x^3+b(t)x^2+c(t)x+d(t)}.$$

**Теорема 4**. *Пусть* $\varphi=\varphi(x,t)$, $\varphi_x=1$, $h=h(t)$. *Если* $E=L=M=0$, *то:*

*1) функция* $w=\dfrac{2\varphi}{\varphi^2-h}$ *является решением уравнения (2), отвечающим* $u_0=2$, $r=-2$;

*2) функция* $w=\dfrac{3\varphi^2-h}{\varphi(\varphi^2-h)}$ *является решением уравнения (2), отвечающим* $u_0=3$, $r=-2$;

*3) функция* $w=\dfrac{3\varphi^2}{\varphi^3-h}$ *является решением уравнения (2), отвечающим* $u_0=3$, $r=-3$.

**Литература**

1. Exton, H. *On non-linear ordinary differential equations with fixed critical points* // Rendiconti di Matematica. 1971. Vol. 4, №3. P. 385–628.

2. Кулеш, Е.Е., *Об одном дифференциальном уравнении в частных производных шестого порядка* / Е.Е. Кулеш, И.П. Мартынов // Весцi НАН Беларусi. Сер. Фiзiка-матэматычных навук. 2018. №1. С. 7–19.

3. Кулеш, Е.Е., *О свойствах решений одного дифференциального уравнения в частных производных шестого порядка* / Е.Е. Кулеш, И.П. Мартынов // Веснiк ГрДУ iмя Янкi Купалы. Сер. 2, Матэматыка. 2018. Т. 8. №2. С. 19–25.

4. Кулеш, Е.Е. *О свойстве Пенлеве для одного дифференциального уравнения в частных производных шестого порядка* / Е.Е. Кулеш // Еругинские чтения - 2019. XIX Международная научная конференция по дифференциальным уравнениям : материалы конференции, Могилев, 14–17 мая 2019 г. : в 2 ч. / Ин-т математики НАН Беларуси. ; редкол.: А.К. Деменчук, С.Г. Красовский, Е.К. Макаров. Минск. 2019. Ч. 1. С. 9–10.

5. Кулеш, Е.Е. *О свойстве Пенлеве для дифференциального уравнения в частных производных шестого порядка* / Е.Е. Кулеш, И.П. Мартынов, В.М. Пецевич // Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений (АМАДЕ-2021) : труды 10-го международного научного семинара АМАДЕ-2021, 13–17 сентября 2021 г., Минск, Беларусь, БГУ. Минск : ИВЦ Минфина. 2022. С. 35-42.

6. Кулеш, Е.Е., *О свойствах решений некоторых дифференциальных уравнений с частными производными* / Е.Е. Кулеш, И.П. Мартынов // Труды института математики НАН Беларуси. 2006. Т.14. №1. С. 94–99.

# АНАЛИТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С РАЦИОНАЛЬНЫМИ ПРАВЫМИ ЧАСТЯМИ

**И.П. Мартынов, В.А. Пронько, А.А. Кумко**

Рассмотрим уравнение

$$y^{IV} = \beta\frac{(y''' - 12yy')^2}{y'' - 6y^2} + ayy'' + by'^2 + cy^3, \tag{1}$$

где $y$ – комплексная функция от $z$, $z$ – независимая комплексная переменная, коэффициенты $\beta, a, b, c$ – комплексные постоянные, $\beta \neq 0$. Решение упрощенного уравнения для (1), инвариантного при замене переменных $(z, y) \to (\varepsilon z, y)$, имеет вид

$$y = C_1(z - z_0)^{2+\frac{1}{1-\beta}} + C_2 z + C_3,$$

при $\beta \notin \left\{1, 2, \frac{3}{2}\right\}$, где $z_0, C_1, C_2, C_3$ – произвольные постоянные.

Если $\beta = 1$, то $y = C_2 + C_3 z + C_4 e^{C_1 z}$.

При $\beta = 2$ и $\beta = \frac{3}{2}$ общее решение уравнения (1) содержит подвижные логарифмические точки ветвления. Справедлива

**Лемма 1**. *Для однозначности решений уравнения* (1) *необходимо и достаточно, чтобы* $\beta = 1$ *или* $\beta = 1 - \frac{1}{\nu}, \nu \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, -2, 0\}$.

Рассмотрим уравнение (1) вида

$$y^{IV} = \beta\frac{(y''' - 12yy')^2}{y'' - 6y^2} + (m + 12)yy'' + 12y'^2 - 6my^3, \tag{2}$$