

Пусть $\Gamma_1 \in \mathbb{R}^{n_2 \times n}$, $\Gamma_2 \in \mathbb{R}^{n \times n_2}$ — матрицы фундаментальных систем решений алгебраических систем $\gamma_1 D = 0$ и $D\gamma_2 = 0$ соответственно (относительно неизвестных γ_i , $i = 1, 2$).

Теорема 1. Пусть для системы (1), (2) выполняется условие

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \Gamma_1 A(\lambda) \Gamma_2 \\ C(\lambda) \Gamma_2 \end{bmatrix} = n_2 \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}.$$

Тогда система (1), (2) является асимптотически наблюдаемой тогда и только тогда, когда выполняются условия: 1) множество P_C состоит из конечного числа элементов; 2) $\text{Re } p < 0 \forall p \in P_C$.

Далее в докладе обсуждается процедура формирования оценки асимптотически наблюдаемых систем вида (1), (2) посредством реализации конечной цепочки построенных специальным образом наблюдателей. Подобные задачи для систем нейтрального типа изучены в [1, 2].

Литература

1. Хартовский В.Е. К вопросу об асимптотической оценке решения линейных стационарных систем нейтрального типа с соизмеримыми запаздываниями // Дифференциальные уравнения. 2019. Т. 55. № 12. С. 1701–1716.
2. Хартовский В.Е. Управление линейными системами нейтрального типа: качественный анализ и реализация обратных связей. Гродно: ГрГУ, 2022.

О НЕКОТОРЫХ ПОДХОДАХ К ПРОЕКТИРОВАНИЮ НАБЛЮДАТЕЛЕЙ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-АЛГЕБРАИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

В.Е. Хартовский

Объект исследования — линейная автономная дифференциально-алгебраическая система с запаздыванием

$$\frac{d}{dt}(Dx(t)) = A(\lambda_h)x(t), \quad t > 0, \quad (1)$$

$$y(t) = C(\lambda_h)x(t), \quad t > 0, \quad (2)$$

где $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $A(\lambda) \in \mathbb{R}^{n \times n}[\lambda]$, $C(\lambda) \in \mathbb{R}^{r \times n}[\lambda]$ ($\mathbb{R}^{k \times m}[\lambda]$ — множество полиномиальных матриц); λ_h — оператор сдвига, определенный для заданного $h > 0$ правилом $\lambda_h f(t) = f(t - h)$; $y(t)$, $t > 0$, — наблюдаемый выходной сигнал. Решение уравнения (1) однозначно определяется начальным условием $x(t) = \eta(t)$, $t \in [-mh, 0]$, где η — неизвестная кусочно-непрерывная функция. Считаем, что уравнение (1) удовлетворяет условию полной регулярности $\deg |pD - A(0)| = \text{rank } D$.

Для систем нейтрального типа различные задачи получения оценки решения при помощи асимптотических наблюдателей исследованы в [1–3] (см. также библиографию в этих работах), а в работах [4–5] построены финитные наблюдатели, ошибка которых есть финитная функция. В настоящем докладе подход, предложенный в работах [1; 2, с. 375], обобщается на случай системы (1), (2).

Обозначим $\deg C(\lambda) = m$, $B_k = \left(\frac{1}{k!} \frac{d^k}{d\lambda^k} C(\lambda) \Big|_{\lambda=0} \right)^T$, $k = \overline{0, m}$, и составим дескрипторное уравнение $B_0 g(k+1) + \sum_{i=1}^m B_i g(k+1-i) = 0$, $k = m, m+1, \dots$, $g(i) = \tilde{g}_i$,

$i = \overline{1, m}$, $\tilde{g}_i \in \mathbb{R}^r$. Решение этой задачи существует тогда и только тогда, когда [6] $\tilde{g}_{m-i} = T_i c$, $i = \overline{1, m}$, где $T_i \in \mathbb{R}^{r \times r_0}$ ($r_0 \in \mathbb{N}$) — матрицы, построенные специальным образом, $c \in \mathbb{R}^{r_0}$ — произвольный вектор. Пусть $S \in \mathbb{R}^{r_0 \times r_0}$ — любое фиксированное решение системы $B_0 T_1 S + \sum_{i=1}^m B_i T_i = 0$, $T_k S = T_{k-1}$, $k = \overline{2, m}$. Положим $T = T_m$, $G_0 = B_0 T$, $G_i = G_{i-1} S + B_i T$, $i = \overline{1, m-1}$, $G(\lambda) = \left(\sum_{i=0}^{m-1} \lambda^i G_i \right)^T$. Способ выбора всех возможных матриц S описан в работе [7].

Определим наблюдатель

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (Dz(t)) &= A(\lambda_h)z(t) + \mathfrak{M}_{00}[\mathfrak{C}(\lambda_h)\mathfrak{z}_t] + \mathfrak{M}_{01}[\mathfrak{z}_{1t}] + \mathfrak{M}_{02}[\mathfrak{z}_{2t}] - \mathfrak{M}_{00}[\mathfrak{y}_t], \\ \dot{\mathfrak{z}}_1(t) &= \mathfrak{M}_{10}[\mathfrak{C}(\lambda_h)\mathfrak{z}_t] + \mathfrak{M}_{11}[\mathfrak{z}_{1t}] + \mathfrak{M}_{12}[\mathfrak{z}_{2t}] - \mathfrak{M}_{10}[\mathfrak{y}_t], \end{aligned} \quad (3)$$

$$z_2(t) = M_{20}(\lambda_h)C(\lambda_h)z(t) + M_{21}(\lambda)z_1(t) + M_{22}(\lambda_h)z_2(t) - M_{20}(\lambda_h)y(t), \quad t > t_0.$$

Здесь $z \in \mathbb{R}^n$, $z_i \in \mathbb{R}^{n_i}$, $i = 1, 2$; запись $\mathfrak{M}_{ij}[\mathfrak{f}_t]$ для кусочно-непрерывной функции $f(t)$ означает функцию вида $\mathfrak{M}_{ij}[\mathfrak{f}_t] = \mathfrak{J}_{ij}(\lambda_h)f(t) + \sum_{\mathfrak{k}=0}^{m_{ij}} \int_0^{\mathfrak{h}} \mathfrak{J}_{ij}^{(\mathfrak{k})}(s)f(t - \mathfrak{k}\mathfrak{h} - s)ds$, где $J_{ij}(\lambda)$ — полиномиальная матрица, $J_{ij}^{(k)}(s) = \sum_{\rho=0}^{\tilde{m}_k} e^{\alpha_{ijk\rho}s} \left(J_{ij1}^{(k\rho)}(s) \cos \beta_{ijk\rho}s + J_{ij2}^{(k\rho)}(s) \sin \beta_{ijk\rho}s \right)$, ($\alpha_{ijk\rho}, \beta_{ijk\rho} \in \mathbb{R}$, $J_{ij1}^{(k\rho)}(s), J_{ij2}^{(k\rho)}(s)$ — полиномиальные матрицы подходящих размеров); $M_{20}(\lambda) \in \mathbb{R}^{n_2 \times n}[\lambda]$, $M_{2j}(\lambda) \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_j}[\lambda]$, $j = 1, 2$, $M_{22}(0) = 0$; t_0 — некоторый момент времени.

Зададим для системы (3) начальные условия

$$z(t) = \tilde{z}(t), \quad z_i(t) = \tilde{z}_i(t), \quad t \in [t_0 - h_1, t_0], \quad i = 3, 4. \quad (4)$$

Здесь h_1 — длина отрезка последствия системы (3), $\tilde{z}$, $\tilde{z}_1$, $\tilde{z}_2$ — кусочно-непрерывные функции. Компонента z вектора решения $\text{col}[z, z_1, z_2]$ системы (3) есть оценка решения x системы (1), $\varepsilon = z - x$ — ошибка оценивания. Обозначим $W(p, \lambda) = pD - A(\lambda)$, Γ_1, Γ_2 — фундаментальные матрицы решений алгебраических уравнений $\gamma D = 0_{1 \times n}$, $D\gamma = 0_{n \times 1}$, $\Delta(p, e^{-ph})$ — характеристическая матрица системы (3).

Теорема 1. Для того чтобы для системы (1), (2) существовал наблюдатель (3) такой, что $\varepsilon(t)$ является векторной компонентой решения однородной ($y \equiv 0$) системы (3), для которой $|\Delta(p, e^{-ph})| = \nu d(p, e^{-ph})$, где $d(p, e^{-ph})$ — любой наперед заданный характеристический квазиполином (с достаточно большой величиной $\deg_p d(p, \lambda)$), $\nu \in \mathbb{R}$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$\text{rank} \begin{bmatrix} W(p, e^{-ph}) \\ C(e^{-ph}) \end{bmatrix} = n, \quad p \in \mathbb{C}; \quad \text{rank} \begin{bmatrix} \Gamma_1 A(\lambda) \Gamma_2 \\ C(\lambda) \Gamma_2 \end{bmatrix} = n - \text{rank } D, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Обозначим $\mu_i(S)$ — собственные значения матрицы S , $\rho_S = \max \{|\mu_i(S)|\}$.

Теорема 2. Для того, чтобы для системы (1), (2) существовал наблюдатель (3) такой, что $\|\varepsilon(t)\| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0$, каково бы ни было начальное условие (4), достаточно, чтобы существовала матрица S , для которой $\rho_S < 1$, и выполнялись условия

$$1) \text{rank} \begin{bmatrix} W(p, e^{-ph}) \\ C(e^{-ph}) \\ G(e^{-ph}) \end{bmatrix} = n \quad p \in \mathbb{C}; \quad 2) \text{rank} \begin{bmatrix} \Gamma_1 A(\lambda) \Gamma_2 \\ C(\lambda) \Gamma_2 \\ G(\lambda) \Gamma_2 \end{bmatrix} = n - \text{rank } D \quad \lambda \in \mathbb{C}. \quad (5)$$

Теорема 3. Пусть для системы (1), (2) выполняются условия (5) и существует матрица S , для которой $\rho_S \leq 1$ и размеры всех жордановых клеток матрицы S ,

отвечающих собственным $\mu_i(S)$ таким, что $|\mu_i(S)| = 1$, равны единице. Тогда существует наблюдатель (3) такой, что для любого начального условия (4) найдутся $\beta \in \mathbb{R}$, $k_0 \in \mathbb{N}$ и функция $\omega(t)$, $\omega(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$, обеспечивающие неравенство $\|\varepsilon(t)\| \leq \beta + \omega(t)$, $t > t_2 + k_0 h$.

Литература

1. Хартовский В.Е. Синтез наблюдателей для линейных систем нейтрального типа // Дифференциальные уравнения. 2019. Т. 55. №3. С. 409–422.
2. Хартовский В.Е. Управление линейными системами нейтрального типа: качественный анализ и реализация обратных связей. Гродно: ГрГУ, 2022.
3. Хартовский В.Е. К вопросу об асимптотической оценке решения линейных стационарных систем нейтрального типа с соизмеримыми запаздываниями // Дифференциальные уравнения. 2019. Т. 55. №12. С. 1701–1716.
4. Метельский А.В., Хартовский В.Е. Синтез финитного наблюдателя для линейных систем нейтрального типа // Автоматика и телемеханика. 2019. № 12. С. 80–102.
5. Метельский А.В., Хартовский В.Е. О точном восстановлении решения линейных систем нейтрального типа // Дифференциальные уравнения. 2021. Т. 57. №2. С. 265–285.
6. Хартовский В.Е. Об одном линейном автономном дескрипторном уравнении с дискретным временем. I Приложение к задаче θ -управляемости // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2020. Вып. 2. С. 290–311.
7. Хартовский В.Е. Об одном линейном автономном дескрипторном уравнении с дискретным временем. II. Каноническое представление и структурные свойства // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2020. Т. 55. С. 102–121.

О РАСЩЕПЛЯЮЩЕМ ПРЕОБРАЗОВАНИИ ЛИНЕЙНОЙ НЕСТАЦИОНАРНОЙ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

О.Б. Цехан

Рассмотрим линейную нестационарную сингулярно возмущенную систему управления с выходом и с запаздыванием по состоянию в уравнении медленной переменной и в выходе:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \mathbf{A}_1(t, e^{-ph})x(t) + \mathbf{A}_2(t, e^{-ph})y(t) + B_1(t)u(t), \quad x \in \mathbb{R}^{n_1}, \quad y \in \mathbb{R}^{n_2}, \\ \mu \dot{y}(t) &= A_3(t)x(t) + A_4(t)y(t) + B_2(t)u(t), \quad u \in \mathbb{R}^r, \quad t \in T = [t_0, t_1], \\ v(t) &= \mathbf{C}_1(t, e^{-ph})x(t) + \mathbf{C}_2(t, e^{-ph})y(t), \quad v \in \mathbb{R}^m, \quad t \in T. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь μ — параметр, $\mu \in (0, \mu^0]$, $\mu^0 \ll 1$, x — медленная переменная, y — быстрая переменная, $p \triangleq \frac{d}{dt}$ — оператор дифференцирования, $h = \text{const} > 0$ — запаздывание, e^{-ph} — оператор запаздывания: $e^{-ph}x(t) = x(t-h)$, $u(t)$ — кусочно-непрерывная на T вектор-функция управления, $v(t)$ — выход системы, $\mathbf{A}_i(t, e^{-ph}) = A_{i0}(t) + A_{i1}(t)e^{-ph}$, $\mathbf{C}_i(t, e^{-ph}) = C_{i0}(t) + C_{i1}(t)e^{-ph}$, $i = 1, 2$, — ограниченные на T нестационарные операторы $\mathbf{A}_i(t, e^{-ph}) : (PC[t-h, t]; \mathbb{R}^{n_i}) \rightarrow \mathbb{R}^{n_1}$, $\mathbf{C}_i(t, e^{-ph}) : (PC[t-h, t]; \mathbb{R}^{n_i}) \rightarrow \mathbb{R}^m$, где $A_{ij}(t)$, $i = 1, 2, j = 0, 1$, $A_k(t)$, $k = 3, 4$, — функциональные матрицы подходящих размеров, элементы которых предполагаются достаточно гладкими, $B_j(t)$, $j = 1, 2$, $C_{ij}(t)$, $i = 1, 2, j = 0, 1$, — непрерывные на T функциональные матрицы подходящих размеров.

В теории управления для многотемповых систем, к которым относится (1), для решения проблем большой размерности, жесткости, сингулярной зависимости моделей от параметров актуально разделение переменных по темпам их изменения. Один из подходов