отвечающих собственным $\mu_i(S)$ таким, что $|\mu_i(S)| = 1$, равны единице. Тогда существует наблюдатель (3) такой, что для любого начального условия (4) найдутся $\beta \in \mathbb{R}$, $k_0 \in \mathbb{N}$ и функция $\omega(t)$, $\omega(t) \to 0$ при $t \to +\infty$, обеспечивающие неравенство $\|\varepsilon(t)\| \leqslant \beta + \omega(t),\, t > t_2 + k_0 h$.

Литература

1. Хартовский В.Е. *Синтез наблюдателей для линейных систем нейтрального типа* // Дифференциальные уравнения. 2019. Т. 55. №3. С. 409–422.

2. Хартовский В.Е. *Управление линейными системами нейтрального типа: качественный анализ и реализация обратных связей.* Гродно: ГрГУ, 2022.

3. Хартовский В.Е. *К вопросу об асимптотической оценке решения линейных стационарных систем нейтрального типа с соизмеримыми запаздываниями* // Дифференциальные уравнения. 2019. Т. 55. №12. С. 1701–1716.

4. Метельский А.В., Хартовский В.Е. *Синтез финитного наблюдателя для линейных систем нейтрального типа* // Автоматика и телемеханика. 2019. № 12. С. 80–102.

5. Метельский А.В., Хартовский В.Е. *О точном восстановлении решения линейных систем нейтрального типа* // Дифференциальные уравнения. 2021. Т. 57. №2. С. 265–285.

6. Хартовский В.Е. *Об одном линейном автономном дескрипторном уравнении с дискретным временем. I Приложение к задаче 0-управляемости* // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2020. Вып. 2. С. 290–311.

7. Хартовский В.Е. *Об одном линейном автономном дескрипторном уравнении с дискретным временем. II. Каноническое представление и структурные свойства* // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2020. Т. 55. С. 102–121.

О РАСЩЕПЛЯЮЩЕМ ПРЕОБРАЗОВАНИИ ЛИНЕЙНОЙ НЕСТАЦИОНАРНОЙ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

О.Б. Цехан

Рассмотрим линейную нестационарную сингулярно возмущенную систему управления с выходом и с запаздыванием по состоянию в уравнении медленной переменной и в выходе:

$$\begin{array}{l} \dot{x}(t) = \mathbf{A}_1\left(t, e^{-ph}\right)x(t) + \mathbf{A}_2\left(t, e^{-ph}\right)y(t) + B_1\left(t\right)u(t),\, x \in \mathbb{R}^{n_1},\, y \in \mathbb{R}^{n_2}, \\ \mu\dot{y}(t) = A_3\left(t\right)x(t) + A_4(t)y(t) + B_2(t)u(t),\, u \in \mathbb{R}^r,\, t \in T = [t_0, t_1], \\ v(t) = \mathbf{C}_1\left(t, e^{-ph}\right)x(t) + \mathbf{C}_2\left(t, e^{-ph}\right)y(t),\, v \in \mathbb{R}^m,\, t \in T. \end{array} \tag{1}$$

Здесь μ — параметр, $\mu \in (0, \mu^0], \mu^0 \ll 1$, x — медленная переменная, y — быстрая переменная, $p \overset{\Delta}{=} \frac{d}{dt}$ — оператор дифференцирования, $h = const > 0$ — запаздывание, e^{-ph} — оператор запаздывания: $e^{-ph}x(t) = x(t-h)$, $u(t)$ — кусочно-непрерывная на T вектор-функция управления, $v(t)$ – выход системы, $\mathbf{A}_i\left(t, e^{-ph}\right) = A_{i0}(t) + A_{i1}(t)e^{-ph}$, $\mathbf{C}_i\left(t, e^{-ph}\right) = C_{i0}(t) + C_{i1}(t)e^{-ph}$, $i = 1, 2$, – ограниченные на T нестационарные операторы $\mathbf{A}_i\left(t, e^{-ph}\right) : (PC[t-h, t]; \mathbb{R}^{n_i}) \to \mathbb{R}^{n_1}$, $\mathbf{C}_i\left(t, e^{-ph}\right) : (PC[t-h, t]; \mathbb{R}^{n_i}) \to \mathbb{R}^m$, где $A_{ij}\left(t\right), i = 1, 2, j = 0, 1$, $A_k\left(t\right), k = 3, 4$, – функциональные матрицы подходящих размеров, элементы которых предполагаются достаточно гладкими, $B_j\left(t\right), j = 1, 2$, $C_{ij}\left(t\right), i = 1, 2,\, j = 0, 1$, – непрерывные на T функциональные матрицы подходящих размеров.

В теории управления для многотемповых систем, к которым относится (1), для решения проблем большой размерности, жесткости, сингулярной зависимости моделей от параметров актуально разделение переменных по темпам их изменения. Один из подходов к разделению движений основан на применении невырожденных преобразований типа [1]. Для систем с запаздыванием проблема разделения движений осложняется тем, что пространство состояний таких систем бесконечномерно. Например, локальная замена переменных, эквивалентная преобразованию [1,2], при применении ее к системе с немалым запаздыванием приводит лишь к частичной декомпозиции системы [3], функциональные преобразования систем с запаздыванием могут привести к изменению пространства решений [4].

В настоящей работе, развивающей [5,6], разрабатывается расщепляющее преобразование для системы (1). Используется представление оператора системы в кольце формальных степенных рядов, что позволяет применять алгебраические свойства оператора запаздывания.

Оператор системы (1) $\mathbf{A}\left(t,\mu,e^{-ph}\right)=\begin{pmatrix}\mathbf{A}_1\left(t,e^{-ph}\right) & \mathbf{A}_2\left(t,e^{-ph}\right)\\ \mu^{-1}A_3\left(t\right) & \mu^{-1}A_4\left(t\right)\end{pmatrix}$ можно рассматривать как зависящий от параметра μ нестационарный оператор с непрерывными на T коэффициентами из кольца матричных полиномов от символа оператора запаздывания над полем $\mathbb{R}$. Класс таких операторов обозначим $\mathcal{M}_T\left(t,\mu,e^{-ph}\right):\left(PC[t_0,t_1];\mathbb{R}^n\right)\to\mathbb{R}^n$.

Продолжим непрерывно с T на $(-\infty,t_1]$ матричные функции $A_{ij}\left(t\right),\ C_{ij}\left(t\right), i=1,2,\ j=0,1,\ \ A_k\left(t\right), k=3,4,\ \ B_j\left(t\right), j=1,2,$ и сохраним для них прежние обозначения.

Через $\mathcal{M}\left(t,\mu,e^{-ph}\right)$ обозначим класс нестационарных матричных операторов $\mathbf{M}\left(t,\mu,e^{-ph}\right):\left(PC\left(-\infty,t\right];\mathbb{R}^n\right)\to\mathbb{R}^n$ с зависящими от малого параметра μ ограниченными непрерывными на $(-\infty,t_1]$ элементами в кольце формальных степенных рядов от символа оператора запаздывания e^{-ph} над полем $\mathbb{R}$. Очевидно, что $\mathbf{A}\left(t,\mu,e^{-ph}\right)\in$ $\in\mathcal{M}_T\left(t,\mu,e^{-ph}\right)\subset\mathcal{M}\left(t,\mu,e^{-ph}\right)$.

С целью сокращения записей аргументы $\left(t,\mu,e^{-ph}\right)$ у матричных операторов иногда будем опускать, когда это не приводит к неоднозначному пониманию.

При фиксированном $\mu\in(0,\mu^0]$ на множестве $\mathcal{M}\left(t,\mu,e^{-ph}\right)$ определим оператор преобразования $\mathbf{K}\left(t,\mu,e^{-ph}\right):\ \mathcal{M}\left(t,\mu,e^{-ph}\right)\to\mathcal{M}\left(t,\mu,e^{-ph}\right)$ вида

$$\mathbf{K}\left(t,\mu,e^{-ph}\right)=\begin{pmatrix}E_{n_1} & \mu\,\mathbf{H}\left(t,\mu,e^{-ph}\right)\\ -\mathbf{L}\left(t,\mu,e^{-ph}\right) & E_{n_2}-\mu\,\mathbf{L}\left(t,\mu,e^{-ph}\right)\mathbf{H}\left(t,\mu,e^{-ph}\right)\end{pmatrix},\qquad(2)$$

действующий на $\mathbf{A}\left(t,\mu,e^{-ph}\right)\in\mathcal{M}\left(t,\mu,e^{-ph}\right)$ по правилу:

$$\mathbf{K}*\mathbf{A}=\mathbf{K}\mathbf{A}\mathbf{K}^{-1}-\mathbf{K}^{-1}\dot{\mathbf{K}}.\qquad(3)$$

Здесь $\mathbf{H}\left(t,\mu,e^{-ph}\right)$, $\mathbf{L}\left(t,\mu,e^{-ph}\right)$ – нестационарные зависящие от малого параметра μ и оператора запаздывания e^{-ph} операторные матрицы, которые удовлетворяют для $t\in(-\infty,t_1]$ следующим матричным дифференциальным операторными уравнениям Риккати:

$$\begin{array}{l}\mu\,\dot{\mathbf{L}}=A_4\left(t\right)\mathbf{L}-A_3\left(t\right)-\mu\,\mathbf{L}\,\left(\mathbf{A}_1\left(t,e^{-ph}\right)-\ \mathbf{A}_2\left(t,e^{-ph}\right)\mathbf{L}\right),\\ -\mu\,\dot{\mathbf{H}}=\mathbf{H}A_4\left(t\right)-\mathbf{A}_2\left(t,e^{-ph}\right)+\mu\mathbf{H}\mathbf{L}\mathbf{A}_2\left(t,e^{-ph}\right)-\\ \mu\left(\mathbf{A}_1\left(t,e^{-ph}\right)-\mathbf{A}_2\left(t,e^{-ph}\right)\mathbf{L}\right)\mathbf{H}.\end{array}\qquad(4)$$

Используя (2), введем нелокальную по времени замену переменных:

$$\begin{pmatrix}x\left(t\right)\\ y\left(t\right)\end{pmatrix}=\mathbf{K}\left(t,\mu,e^{-ph}\right)\begin{pmatrix}\xi\left(t\right)\\ \eta\left(t\right)\end{pmatrix},\ \xi\left(t\right)\in\mathbb{R}^{n_1},\ \ \eta\left(t\right)\in\mathbb{R}^{n_2},\ \ t\in(-\infty,t_1],\qquad(5)$$

которая порождает преобразование (3) оператора $\mathbf{A}\left(t,\mu,e^{-ph}\right)$ системы (1).

Теорема. *Пусть 1) элементы матриц* $A_{ij}(t), i = 1,2, j = 0,1,$ $A_i(t), i = 3,4,$ *определены и являются ограниченными аналитическими функциями на* $(-\infty, t_1]$*; для матрицы* $A_4(t)$ $\forall t \in (-\infty, t_1]$ *выполнены предположения:* $Re\,\lambda(A_4(t)) \le -c < 0$, $\|A_4(t)\| \le \beta$, $\left\|\dot{A}_4(t)\right\| \le \beta$*; 3) существуют удовлетворяющие на* $(-\infty, t_1]$ *системе (4) матричные функции* $\mathbf{L}\left(t, \mu, e^{-ph}\right)$, $\mathbf{H}\left(t, \mu, e^{-ph}\right)$ *такие, что соответствующая матрица (2) является матрицей Ляпунова. Тогда существует* $\mu^* > 0$ *такое, что в результате замены переменных (5), (2), (4)* $\forall \mu \in (0, \mu^*]$ *система (1) преобразуется в алгебраически и асимптотически эквивалентную систему с разделенными движениями*

$$\begin{array}{l}\dot{\xi}(t) = \mathbf{A}_\xi\left(t, \mu, e^{-ph}\right)\xi(t) + \mathbf{B}_\xi\left(t, \mu, e^{-ph}\right)u(t),\\ \mu\dot{\eta}(t) = \mathbf{A}_\eta\left(t, \mu, e^{-ph}\right)\eta(t) + \mathbf{B}_\eta\left(t, \mu, e^{-ph}\right)u(t),\ t \in T,\\ v(t) = \mathbf{C}_\xi\left(t, \mu, e^{-ph}\right)\xi(t) + \mathbf{C}_\eta\left(t, \mu, e^{-ph}\right)\eta(t),\ t \in T,\end{array} \tag{6}$$

$$\begin{array}{l}\mathbf{A}_\xi\left(t, \mu, e^{-ph}\right) \triangleq \mathbf{A}_1\left(t, e^{-ph}\right) - \mathbf{A}_2\left(t, e^{-ph}\right)\mathbf{L}, \mathbf{B}_\xi\left(t, \mu, e^{-ph}\right) \triangleq\\ = B_1(t) - \mathbf{H}B_2(t) - \mu\mathbf{HL}B_1(t),\\ \mathbf{C}_\xi\left(t, \mu, e^{-ph}\right) \triangleq (\mathbf{C}_1\left(t, e^{-ph}\right) - \mathbf{C}_2\left(t, e^{-ph}\right)\mathbf{L}),\\ \mathbf{A}_\eta\left(t, \mu, e^{-ph}\right) \triangleq A_4(t) + \mu\,\mathbf{L}\mathbf{A}_2\left(t, e^{-ph}\right), \mathbf{B}_\eta\left(t, \mu, e^{-ph}\right) \triangleq B_2(t) + \mu\mathbf{L}B_1(t),\\ \mathbf{C}_\eta\left(t, \mu, e^{-ph}\right) \triangleq \mathbf{C}_2\left(t, e^{-ph}\right) + \mu\left(\mathbf{C}_1\left(t, e^{-ph}\right) - \mathbf{C}_2\left(t, e^{-ph}\right)\right)\mathbf{H},\end{array}$$

и операторы системы (6) могут быть представлены в виде рядов по степеням малого параметра с коэффициентами из кольца матричных полиномов от оператора запаздывания, которые вычисляются итеративно по функциональным матрицам системы (1).

Благодарность. Работа выполнена при финансовой поддержке БРФФИ № Ф22-050.

Литература

1. Chang K. *Singular perturbations of a general boundary value problem* // SIAM J. Math. Anal. 1972. Vol. 3. № 3. P. 520–526. doi:10.1137/0503050

2. Kokotovic P.V., Khalil H. K., O'Reilly J. *Singular Perturbations Methods in Control: Analysis and Design.* NY. Academic Press, 1999.

3. Magalhaes L.T. *Invariant manifolds for singularly perturbed linear functional differential equations* // Journal of Diff. Equat. 1984. Vol. 54. № 3. P. 310-345.

4. Марченко В.М., Луазо Ж.-Ж. *Реализация динамических систем в шкалах систем с последействием: I. Реализуемость* // Дифференциальные уравнения. 2006. Т. 42. № 11. С. 1515–1523.

5. Цехан О. Б. *Расщепляющее преобразование для линейной стационарной сингулярно возмущенной системы с запаздыванием и его применение к анализу и управлению спектром* // Весн. Гродз. дзярж. ун-та імя Янкі Купалы. Сер. 2, Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. 2017. Т. 7. № 1. С. 50–61.

6. Tsekhan O. *Approximation of the solution based on the decoupling transformation of linear time-varying singularly perturbed system with delay* // Tchemisova, T.V., Torres, D.F.M., Plakhov, A.Y. (eds) Dynamic Control and Optimization. DCO 2021. Springer Proceedings in Mathematics and Statistics. Springer, Cham. 2023. Vol. 407. P. 77–97 doi: 10.1007/978-3-031-17558-9-4