ОБ ОЦЕНКАХ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С БЕСКОНЕЧНЫМ РАСПРЕДЕЛЕННЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Т. Ыскак

Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений с распределенным запаздыванием следующего вида

$$\frac{d}{dt}y(t) = A(t)y(t) + \int\limits_{-\infty}^{t} B(t, t-s)y(s)ds, \tag{1}$$

где $A(t)$ — матрица размера $n \times n$ с непрерывными, T-периодическими элементами, $B(t,s)$ — матрица размера $n \times n$ с непрерывными, T-периодическими по первой переменной элементами, т.е.

$$A(t) \equiv A(t+T), \quad B(t,s) \equiv B(t+T,s).$$

Цель работы состоит в исследовании экспоненциальной устойчивости нулевого решения системы (1) и получении оценок решений, характеризующих экспоненциальное убывание на бесконечности.

Рассмотрим начальную задачу для системы (1):

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}y(t) = A(t)y(t) + \displaystyle\int\limits_{-\infty}^{t} B(t,t-s)y(s)ds, \quad t > 0, \\ y(s) = \varphi(s), \quad s \in (-\infty, 0], \\ y(+0) = \varphi(0), \end{cases} \tag{2}$$

где $\varphi \in C(-\infty, 0]$ ограниченная заданная функция. При исследовании устойчивости нулевого решения системы (1) используется функционал Ляпунова – Красовского, предложенный в [2]:

$$v(t,y) = \langle H(t)y(t), y(t)\rangle + \int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{t-\eta}^{t} \langle K(t-s,\eta)y(s), y(s)\rangle\, ds d\eta$$

Данный функционал является аналогом функционала Ляпунова – Красовского из [1]. Сформулируем полученный результат.

Теорема. *Пусть*

1. Существуют гладкая T-периодическая матрица $H(t) = H^*(t)$, и дифференцируемая по первой переменной матрица $K(t,\eta) = K(t,\eta)$, такие, что

$$H(t) > 0, \quad K(t,\eta) > 0, \quad \frac{\partial}{\partial t}K(t,\eta) < 0, \quad t > 0, \quad \eta > 0.$$

2. Существует такое число $k > 0$, что

$$\frac{\partial}{\partial t}K(t,\eta) + kK(t,\eta) \le 0, \quad t > 0, \quad \eta > 0.$$

3. Определена матрица

$$P(t) = -\frac{d}{dt}H(t) - H(t)A(t) - A^*(t)H(t) - \int\limits_0^\infty K(0,s)ds -$$

$$-\int\limits_0^\infty H(t)B(t,s)K^{-1}(s,s)B^*(t,s)H(t)ds,$$

при этом $\int\limits_0^T \gamma(s)ds > 0$, *где* $\gamma(t) = \min\{p_H(t), k\}$, $p_H(t)$ *— минимальное собственное значение матрицы* $P_H(t) = H^{-\frac{1}{2}}P(t)H^{-\frac{1}{2}}$.

Тогда для решения начальной задачи (2) справедлива оценка

$$\|y(t)\|^2 \le \|H^{-1}(t)\|e^{-\int\limits_0^t \gamma(s)ds} v(0,\varphi),$$

где

$$v(0,\varphi) = \langle H(0)\varphi(0), \varphi(0)\rangle + \int\limits_0^\infty \int\limits_{-\eta}^0 K(-s,\eta)\varphi(s), \varphi(s)ds.$$

Отметим, что из полученной оценки следует экспоненциальная устойчивость нулевого решения.

Работа выполнена в рамках государственного задания Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН (проект № FWNF-2022-0008).

Литература

1. Демиденко Г. В., Матвеева И. И. *Асимптотические свойства решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом* // Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика. 2005. Т. 5, № 3. С. 20–28.

2. Ыскак Т. *Оценки решений одного класса систем уравнений нейтрального типа с распределенным запаздыванием* // Сиб. электрон. матем. изв. 2020. Т. 17, С. 416–427. Yskak T. K., Stability of solutions to systems of differential equations with distributed delay, Functional Differential Equations, 2018. v. 25. No. 1-2. 97-108.

CLOSING AND CONNECTING LEMMAS FOR CONSERVATIVE FLOWS

S.G. Kryzhevich

This is a joint work with Prof. E.O. Stepanov. We consider an autonomous system of ordinary differential equations:

$$\dot{x} = V(x), \qquad x \in R^d$$

where the vector field V is bounded, Lipschitz continuous, and satisfies the so-called zero-mean drift condition [1]:

$$\lim_{L\to\infty} \frac{1}{L^d} \sup_{x\in R^d} \left| \int\limits_{[0,L]^d} V(x+y)\,dy \right| = 0.$$