

$$-2\left(\beta\left(1+\frac{12}{m}\right)-1-\frac{9}{m}\right)ww'^2+\frac{24}{m}(\beta-1)\left(\beta-\frac{1}{2}\right)w^3w'-\frac{6}{m}(\beta-1)^2w^5. \quad (10)$$

С учётом (10), замены $x' = xw$ и леммы из [3] имеет место

Теорема 3. *Для того, чтобы уравнение (2) имело свойство Пенлеве, необходимо и достаточно, чтобы этим свойством обладало уравнение (10) и полярные разложения его решений имели целые вычеты.*

Литература

1. Мартынов И. П. *О дифференциальных уравнениях с неподвижными критическими особыми точками.* // Дифференц. уравнения. 1973. Т. 9. № 10. С. 1780–1791.
2. Ванькова Т. Н. *О некоторых аналитических свойствах решений алгебраических дифференциальных уравнений.* // Веснік Гродзенскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя Янкі Купалы. Серыя 2. Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і ўпраўленне. Біялогія. 2008. № 1(16). С. 8–16.
3. Колесникова Н. С., Лукашевич Н. А. *Об одном классе дифференциальных уравнений третьего порядка с неподвижными критическими точками.* // Дифференц. уравнения. 1972. Т. 8. № 11. С. 2082–2086.

НЕКОТОРЫЕ ПЕРВЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Г.Т. Можджер

Рассмотрим дифференциальное уравнение третьего порядка

$$y''' = a_1 \frac{y'y''}{y} + a_2 \frac{(y')^3}{y^2} + a_3 y y'' + a_4 (y')^2 + a_5 y^2 y' + a_6 y^4, \quad a_3 a_4 a_5 a_6 \neq 0, \quad (1)$$

где $a_i, i = \overline{1, 6}$ — постоянные коэффициенты.

Упрощенным уравнением к уравнению (1) является уравнение $y''' = a_1 \frac{y'y''}{y} + a_2 \frac{y'^3}{y^2}$, которое имеет характеристический многочлен $\varphi(\lambda) = 2\lambda^2 + (a_1 + 1)\lambda - a_2$.

Отсюда согласно [1] имеем, что $a_1 + 1 = -2(\lambda_1 + \lambda_2)$, $a_2 = -2\lambda_1\lambda_2$, где λ_1, λ_2 — корни характеристического многочлена.

Предположим, что уравнение (1), имеет первый интеграл веса $p_1 = 2k$ вида

$$y^{2k-12}y''^4 + \sum_{n=1}^4 \sum_{m=1}^{2n+1} A_{n,m} y^{2k+2m-n-14} y'^{2n+1-m} y''^{4-n} = K, \quad (2)$$

где $A_{n,m}$ — произвольные постоянные, K — произвольная постоянная интегрирования.

Пусть корни характеристического уравнения $\varphi(\lambda)$ будут

$$\lambda_1 = \frac{p+k-8}{4}, \quad \lambda_2 = -\frac{3p-k+8}{4}. \quad (3)$$

Найдем условия на коэффициенты уравнения (1) при которых оно имеет первый интеграл вида (2). Для этого продифференцируем (2) с учетом (1). Получим

$$\begin{aligned} 4a_1 + 2k - 12 + 2A_{1,1} &= 0, \quad 4a_3 + A_{1,2} = 0, \\ (4-n)(a_2 A_{n,m} + a_4 A_{n,m-1} + a_5 A_{n,m-2}) + (3-n)a_3 A_{n+1,m-1} + \\ + ((3-n)a_1 + 2k - 15 - n + 2m)A_{n+1,m} + (2n-m+5)A_{n+2,m} &= 0, \end{aligned} \quad (4)$$

где $n = \overline{0, 3}$, $m = \overline{1, 2n + 4}$,

$$A_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = 0, j = 1, \\ 0, & \text{если } i = 0, j \neq 1; \text{ или } j \leq 0; \text{ или } i > 4; \text{ или } j > 2i + 1 \end{cases}$$

Найдем случаи когда условия (4) совместны и в результате выделим все классы уравнений (1), которые имеют первые интегралы вида (2) при условии (3), то есть

$$a_1 = 7 - k + p, \quad a_2 = \frac{1}{8}(p + k - 8)(3p - k + 8). \quad (5)$$

В частности, если положить

$$\begin{aligned} p &= \frac{(4c + 1)k}{4}, \quad a_4 = \frac{1}{128c}a_3(k(144c^2 + 136c + 9) - 256c), \\ a_5 &= \frac{1}{128c^2}a_3^2(4c + 1)(36c + 17), \quad a_6 = \frac{3}{128kc^3}a_3^3(4c + 1)^2, \end{aligned} \quad (6)$$

где c — произвольная постоянная, то уравнение (1) и первый интеграл (2) примут соответственно вид

$$\begin{aligned} y''' &= (7 + \frac{1}{4}k(4c - 3))\frac{y'y''}{y} + \frac{1}{128}(k(12c - 1) + 32)(k(4c + 5) - 32)\frac{y'^3}{y^2} + a_3yy'' + \\ &+ \frac{1}{128c}a_3(k(144c^2 + 136c + 9) - 256c)y'^2 + \frac{1}{128c^2}a_3^2(4c + 1)(36c + 17)y^2y' + \\ &+ \frac{3}{128kc^3}a_3^3(4c + 1)^2y^4, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{65536k^4c^8}y^{2k-16} \left(k^4c^8(16yy'' + (k(4c + 5) - 32)y'^2)(16yy'' - (k(12c - 1) + 32)y'^2)^3 - \right. \\ &- 8a_3k^4c^7(128cyy'' + (k(48c^2 + 56c + 3) - 256c)y'^2)(16yy'' - (k(12c - 1) + 32)y'^2)^2y^2y' - \\ &- 4a_3^2k^3c^6(16yy'' - (k(12c - 1) + 32)y'^2)(512(4c + 1)y^2y''^2 - 16(k(336c^2 - 88c - 19) + \\ &+ 128(4c + 1))yy'^2y'' - (k^2(4032c^3 + 4368c^2 + 436c - 5) - 32k(336c^2 - 88c - 19) - \\ &- 2048(4c + 1))y'^4)y^4 + 8a_3^3k^3c^5(768(4c + 1)(12c - 1)y^2y''^2 + \\ &+ 64(k(720c^2 + 168c + 5) - 48(4c + 1)(12c - 1))yy'^2y'' - \\ &- (k^2(48384c^4 + 48384c^3 + 6624c^2 - 176c - 19) + 128k(720c^2 + 168c + 5) - \\ &- 3072(4c + 1)(12c - 1))y'^4)y^6y' + 2a_3^4k^2c^4(2304(4c + 1)^2y^2y''^2 + \\ &+ 384(4c + 1)(k(60c + 7) - 24(4c + 1))yy'^2y'' - (k^2(241920c^4 + 241920c^3 + \\ &+ 56160c^2 + 2960c - 63) + 768k(4c + 1)(60c + 7) - 9216(4c + 1)^2)y'^4)y^8 + \\ &+ 8a_3^5k^2c^3(4c + 1)(288(4c + 1)yy'' - (k(12096c^3 + 9072c^2 + 1404c + 37) + \\ &+ 576(4c + 1))y'^2)y^{10}y' - 4a_3^6k^2c^2(4c + 1)^2(336c^2 + 168c + 13)y^{12}y'^2 - \\ &\left. - 216a_3^7kc(4c + 1)^4y^{14}y' - 27a_3^8(4c + 1)^4y^{16} \right) = K. \end{aligned} \quad (8)$$

Таким образом, верна

Теорема. Если для уравнения (1) выполнены соотношения (5) и имеют место условия (6), то уравнение (7) имеет первый интеграл вида (8).

Литература

1. Можджер Г. Т. *Первые интегралы одного класса дифференциальных уравнений высших порядков с рациональной правой частью* : дис. ... канд. физ.-мат. наук : 01.01.01. Гродно, 2006.

АНАЛИТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ ОДНОРОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

А. А. Мухин, И.П. Мартынов, В. А. Пронько

Рассмотрим однородное дифференциальное уравнение

$$y^2 y' y''' = ay^2 (y'')^2 + by(y')^2 y'' + c(y')^4 + ly(y')^3,$$

где $a, b, c, l \in \mathbb{C}$, $l \neq 0$, $y = y(z)$.

Масштабным преобразованием аргумента сделаем $l = 2$. Будем иметь

$$y^2 y' y''' = ay^2 (y'')^2 + by(y')^2 y'' + c(y')^4 + 2y(y')^3. \quad (1)$$

Рассмотрим случай, когда уравнение (1) не имеет полярных решений. В этом случае необходимо выполнение условий

$$a + b + c = 1, \quad 2a + b = 3. \quad (2)$$

Учитывая (2), перепишем уравнение (1):

$$y^2 y' y''' = ay^2 (y'')^2 + (3 - 2a)y(y')^2 y'' + (a - 2)(y')^4 + 2y(y')^3. \quad (3)$$

Легко проверить, что если $a \neq \frac{3}{2}$, то уравнение (3) имеет двухпараметрическое решение

$$y = Ce^{\frac{2a-3}{z-z_0}}, \quad \forall z_0, C. \quad (4)$$

Лемма 1. Уравнение (3) при $a \neq \frac{3}{2}$ имеет решение с подвижной существенно особой точкой.

Лемма 2. Уравнение (3) при $a \neq \frac{3}{2}$ имеет первый интеграл

$$\left(\frac{y''}{y} - \frac{(y')^2}{y^2} \right)^2 + \frac{4}{2a-3} \left(\frac{y'}{y} \right)^3 = h \left(\frac{y'}{y} \right)^{2a}, \quad \forall h \in \mathbb{C}. \quad (5)$$

Замечание 1. Функция (4) удовлетворяет уравнению (5) при $h = 0$.

Замечание 2. При $a = 2$ уравнение (3) имеет общее решение

$$y = C \left(1 + \frac{C_2 - C_1}{z - C_2} \right)^{\frac{1}{C_2 - C_1}}, \quad \forall C, C_1, C_2, C_1 \neq C_2.$$

Пусть $a = \frac{3}{2}$. Верна

Лемма 3. Уравнение (3) при $a = \frac{3}{2}$ имеет первый интеграл

$$\left(\frac{y''}{y} - \frac{(y')^2}{y^2} \right)^2 = 4 \left(\frac{y'}{y} \right)^3 \left(\ln \left(\frac{y'}{y} \right) + H \right), \quad \forall H \in \mathbb{C}. \quad (6)$$