УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

ОСОБЫЕ ВАРИАНТЫ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ В КОНУСАХ

Н.Н. Агаркова, В.Б. Васильев, И.Н. Ибадуллаева, Н.В. Эберлейн

В работе [1] были рассмотрены эллиптические псевдодифференциальные уравнения в модельных областях с негладкой границей (конические точки, ребра различной размерности). Исследование было основано на специальной волновой факторизации эллиптического символа с индексом $æ$, наличие которой позволяло описать картину разрешимости модельного псевдодифференциального уравнения. Эти исследования были продолжены и развиты в многомерных ситуациях, и, в частности, рассмотрены случаи, когда параметры конуса стремятся к предельным значения 0 и ∞ [2–5].

Модельный псевдодифференциальный оператор A с символом $A(\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}^m$, определяется стандартно

$$(Au)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}}^{m} e^{i(x-y)\xi} A(\xi) u(y) dy d\xi.$$

На плоскости рассматривается уравнение

$$(Au)(x) = 0 \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{C_+^a}, \tag{1}$$

где

$$C_+^a = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 > a|x_1|, a > 0\},$$

решение ищется в пространстве $H^s(\mathbb{R}^2 \setminus \overline{C_+^a})$. Предполагается, что такая факторизация для символа $A(\xi)$ существует) относительно угла C_+^a и выполняется условие $1/2 < æ - s < 3/2$.

Далее мы добавляем интегральное условие

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(x_1, x_2) dx_2 \equiv g(x_1). \tag{2}$$

Показано, что задача (1),(2) однозначно разрешима при $a \to \infty$, только если функция g удовлетворяет определенному интегральному уравнению.

В трехмерном случае рассмотрено уравнение

$$(Au)(x) = 0 \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{C_+^{ab}}, \tag{3}$$

в пространстве Соболева–Слободецкого $H^s(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{(C_+^{ab})}$, где

$$C_+^{ab} = \{x \in \mathbb{R}^3 : x = (x_1, x_2, x_3).x_3 < a|x_1| + b|x_2|, a, b > 0\},$$

с интегральным условием

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(x_1, x_2, x_3) dx_3 \equiv g(x_1, x_2), \tag{4}$$

в случае $æ - s = 1 + \delta, |\delta| < 1/2$. Показано, что задача (3), (4) однозначно разрешима при $a \to \infty$ или $b \to \infty$, только если функция g удовлетворяет определенному интегральному уравнению.

Мы опишем здесь несколько многомерных ситуаций, основываясь на этих примерах. Точнее, мы покажем, какие многомерные области с разрезами могут быть получены аналогичным предельным переходом и приведем формулировки соответствующих постановок краевых задач.

Основная идея заключается в следующем. Пусть C_1 и C_2 – конусы в $\mathbb{R}^m$ и $\mathbb{R}^n$ соответственно, не содержащие целой прямой. Очевидно, что $C_1 \times C_2$ – это конус в пространстве $\mathbb{R}^{m+n}$, не содержащий целой прямой в $\mathbb{R}^{m+n}$. Тогда мы можем поставить краевую задачу аналогичную (3),(4) в области $\mathbb{R}^{m+n} \setminus (C_1 \times C_2)$. Записывая формулу для решения этой задачи (при наличии волновой факторизации относительно "большого"конуса), мы можем рассматривать краевые задачи в областях с многомерными разрезами разной геометрии, устремляя к предельным значениям параметры конусов C_1 и C_2.

Первый вариант такой краевой задачи

$$\begin{cases} (Au)(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^5 \setminus \overline{(C_+^a \times C_+^{bd})}, \\ \int\limits_{\mathbb{R}^2} u(x_1, x_2.x_3, x_4, x_5) dx_2 dx_5 = g(x_1, x_3, x_4), \end{cases} \tag{5}$$

где $C_+^a \subset \mathbb{R}^2, C_+^{bd} \subset \mathbb{R}^3$,

Второй вариант

$$\begin{cases} (Au)(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^4 \setminus \overline{(C_+^a \times C_+^b)}, \\ \int\limits_{\mathbb{R}^2} u(x_1, x_2.x_3, x_4) dx_2 dx_4 = g(x_1, x_3), \end{cases}$$

где $C_+^a \subset \mathbb{R}^2, C_+^b \subset \mathbb{R}^2$.

Можно рассмотреть и такой вариант с двумя многогранными углами в $\mathbb{R}^6$, точнее, следующую краевую задачу

$$\begin{cases} (Au)(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^6 \setminus \overline{(C_+^{ab} \times C_+^{dl})}, \\ \int\limits_{\mathbb{R}^2} u(x_1, x_2.x_3, x_4, x_5, x_6) dx_3 dx_6 = g(x_1, x_2, x_4, x_5), \end{cases}$$

где $C_+^{ab} \subset \mathbb{R}^3, C_+^{dl} \subset \mathbb{R}^3$.

Наконец, можно вернуться к краевой задаче (5) и рассмотреть такую же краевую задачу. Разумеется, решение будет таким же, но предельный вариант возможен в виде: $a \to \infty, b \to \infty, d = const$, получая разрез другой геометрии.

Литература

1. Vasil'ev V. B. *Wave Factorization of Elliptic Symbols: Theory and Applications. Introduction to the Theory of Boundary Value Problems in Non-Smooth Domains.* Dordrecht–Boston–London: Kluwer Academic Publishers, 2000.

2. Vasilyev V. B. *Pseudodifferential equations, wave factorization, and related problems* // Math.Meth. Appl. Sci. 2018. V. 41. № 18. P. 9252–9263.

3. Vasilyev V. B. *Pseudo-differential equations and conical potentials: 2-dimensional case* // Opusc. Math. 2019. V. 39. № 1. P. 109–124.

4. Vasilyev V. B. *On certain 3-dimensional limit boundary value problems* // Lobachevskii J. Math. 2020. V. 41. № 5. P. 917–925.

5. Kutaiba Sh., Vasilyev V. *On limit behavior of a solution to boundary value problem in a plane sector* // Math. Meth. Appl. Sci. 2021. V. 44. № 15. P. 11904–11912.