# ЗАДАЧА КОЛЕБАНИЯ МЕМБРАНЫ, ПОДВЕРГАЮЩЕЙСЯ ИМПУЛЬСНОМУ ВОЗДЕЙСТВИЮ В ФИКСИРОВАННЫЕ МОМЕНТЫ ВРЕМЕНИ

**К.К. Елгондиев**

Эластичную мембрану с туго закрепленной границей в положении покоя отождествляют с некоторой областью $G$, ограниченной кусочно-гладкой жордановой кривой $\Gamma$ в плоскости $OXY$ [1]. Предположим, что в фиксированные моменты времени $t = t_k$, $k = 1, 2, \dots$, такая мембрана подвергается кратковременным возмущениям. Колебания мембраны характеризуется решением $u = u(x, y, t)$ волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta u, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad t \neq t_k, \tag{1}$$

с начальными условиями

$$u\,(x, y, 0) = \varphi_0\,(x, y)\,,$$
$$\left.\frac{\partial u\,(x, y, t)}{\partial t}\right|_{t=0} = \varphi_1\,(x, y)\,, \quad (x, y) \in G, \tag{2}$$

и условиями импульсных воздействий

$$\Delta \left.\frac{\partial u\,(x, y, t)}{\partial t}\right|_{t=t_k} = \frac{\partial u\,(x, y, t_k + 0)}{\partial t} - \frac{\partial u\,(x, y, t_k - 0)}{\partial t} = I_k\,(x, y)\,, \ (x, y) \in G, \ k \in N, \tag{3}$$

где $I_k\,(x, y) \neq 0$, $(x, y) \in G$, $k \in N$ некоторые действительные функции, а относительно величин $t_p$, $p \in N$ предполагается, что они удовлетворяют условию $t_m > t_n$ и $t_n \to +\infty$ при $k \to \infty$, а также граничным условиям

$$u\,(x, y, t) = 0, \quad t \geq 0, \ \ (x, y) \in \Gamma. \tag{4}$$

Решением задачи называется функция

$$u = u(x, y, t) \in C^2_{(x,y),t}\,(G \times ((0, +\infty) \backslash \{t_k, k \in N\}))\,,$$

непрерывная справа по $t$ в точках импульсных воздействий $t = t_k$, $k \in N$, удовлетворяющая при $t = 0$ начальному условию (2) и при $t = t_k$, $k \in N$, удовлетворяющая условиям импульсных воздействий, а также граничному условию (4) в точках $(x, y)$ кривой $\Gamma$. Рассмотрим задачу построения решения задачи (1)-(4) с помощью метода разделения переменных [1].

Решения задачи (1)-(4) для $t \neq t_k$, $k \in N$ представим в виде

$$u\,(x, y, t) = T\,(t)\,V\,(x, y)\,. \tag{5}$$

Тогда для определения функции $V\,(x, y)$ имеем однородную задачу Дирихле для уравнения Гельмгольца

$$\Delta V\,(x, y) + \lambda V\,(x, y) = 0, \tag{6}$$

$$V\,(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \Gamma, \tag{7}$$

где $\lambda = \mu^2$, где $\mu$ – действительное число. Эта задача при достаточно общих условиях на $G$ имеет счетное множество собственных значений $\mu_j$, $j = \overline{1, n}$, и соответствующие им собственные функции $V_j\,(x, y)$.

При $t \neq t_k$ , $k \in N$ каждому собственному значению $\mu_n$ задачи (6), (7) соответствует решения $T_n(t)$ дифференциального уравнения

$$T_n''(t) + (a\mu_n)^2 T_n(t) = 0, \quad t \neq t_k, \tag{8}$$

с импульсным воздействием

$$\Delta T_n'(t)|_{t=t_k} = \frac{1}{N^2(V_n)} \int\limits_G I_k(x,y)\, V_n(x,y)\, dxdy, \tag{9}$$

где

$$N(V_n) = \left( \int\limits_G V^2{}_n(x,y) dxdy \right)^{1/2}.$$

Показано, что решение задачи (1)–(4) , соответствующей собственному значению $\mu_n$ , может быть представлено в виде ряда

$$u(x,y,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\, V_n(x,y),$$

где явный вид функций $T_n(t)$ находится как решение уравнения (8) с импульсным воздействием (9).

Рассмотрены частные случаи, когда область $G$ представляет собой прямоугольник или круг радиуса $R$ с центром в начале координат.

**Литература**


1. Тихонов А. Н., Самарский А. А. *Уравнения математической физики.* М.: Наука, 2004.
2. Samoilenko A. M., Perestyuk N. A. *Impulsive differential equations.* Singapore: World Scientific, 1995.
3. Самойленко В. Г., Елгондиев К. К. *Исследование линейных дифференциальных уравнений в* $R^2$ . Препринт / АН УССР. Ин-т математики. 89.59. Киев. 1989.
4. Samoilenko V. Hr., Yelgondyev K. K. *On existence of periodical solutions for differential equations with impulsive effects* // Jorn. Facta Universitatis. 1998. 2 (2). P. 635–639.
5. Елгондиев К. К. *Распространение тепла в однородном шаре по действием импульсных источников* // Докл. АН РУз. 2003. № 1. С. 18–20.
6. Elgondiyev K. K., Kurbanbaev O. O. , Matmuratova S. R. *String oscillations with impulsive effects* // Karakalpak Scientific journal. 2020, Vol. 3. P. 46–52.


## О ТРЁХМЕРНЫХ УРАВНЕНИЯХ НАВЬЕ – СТОКСА

**С.С. Каянович**

В данном докладе речь идёт о решении уравнений Навье – Стокса в трубе прямоугольного сечения. Труба со сглаженными углами – на рис. 1.


Рис. 1.