ЗАДАЧА ПИКАРА НА ПЛОСКОСТИ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

В.И. Корзюк, О.А. Ковнацкая

1. Постановка задачи. На плоскости $\mathbb{R}^{\nvDash}$ независимых переменных $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$ рассмотрим квазилинейное гиперболическое дифференциальное уравнение второго порядка вида

$$\mathcal{L}u(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{D}) = a(\boldsymbol{x})\partial^2_{x_1}u(\boldsymbol{x}) + 2b(\boldsymbol{x})\partial_{x_1}\partial_{x_2}u(\boldsymbol{x}) + c(\boldsymbol{x})\partial^2_{x_2}u(\boldsymbol{x}) + \mathcal{L}^{(1)}(\boldsymbol{x}, u(\boldsymbol{x})) = f(\boldsymbol{x}) \qquad (1)$$

относительно искомой функции $u\colon \mathbb{R}^2 \ni \boldsymbol{x} \to u(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}$, где a, b, c, f – заданные функции на всей плоскости. Оператор $\mathcal{L}^{(1)}$ рассматриваем как функцию $\mathcal{L}^{(1)}(\boldsymbol{x}, \xi_1, \xi_2, \xi_3)$ от переменных $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, которая удовлетворяет следующему условию Липшица.

Условие 1. *Для любого $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ существует константа $L \in \mathbb{R}$, для которой для любых $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ и $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ из $\mathbb{R}^3$ выполняется неравенство*

$$|\mathcal{L}^{(1)}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}) - \mathcal{L}^{(1)}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\eta})| \leqslant L|\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\eta}|. \qquad (2)$$

Условие 2. *На всей плоскости $\mathbb{R}^2$ уравнение (1) является гиперболическим, т. е. дискриминант, составленный из коэффициентов главной части его является положительным, т. е.*

$$b^2(\boldsymbol{x}) - a(\boldsymbol{x})c(\boldsymbol{x}) \geqslant A > 0 \qquad (3)$$

для любого $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ и некоторой константы A из множества действительных чисел $\mathbb{R}$.

Будем считать, что коэффициент $a(\boldsymbol{x}) \neq 0$ или $c(\boldsymbol{x}) \neq 0$ (если $a(\boldsymbol{x}) = c(\boldsymbol{x}) = 0$, то мы уже имеем второй канонический вид уравнения (1)). Из условия 2 следует, что уравнение (1) имеет два семейства характеристик $\varphi^{(1)}(\boldsymbol{x}) = C_1$ и $\varphi^{(2)}(\boldsymbol{x}) = C_2$, которые являются решениями соответствующего уравнения характеристик

$$a(\boldsymbol{x})(\mathrm{dx}_2)^2 - 2\mathrm{b}(\boldsymbol{x})\mathrm{dx}_1\mathrm{dx}_2 + \mathrm{c}(\boldsymbol{x})(\mathrm{dx}_1)^2 = 0. \qquad (4)$$

К уравнению (1) присоединим условия

$$u(\boldsymbol{x})|_{\gamma^{(1)}} = \psi^{(1)}(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \gamma^{(1)}, \qquad (5)$$

$$u(\boldsymbol{x})|_{\gamma^{(2)}} = \psi^{(2)}(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \gamma^{(2)}, \qquad (6)$$

которые задаются на характеристике $\gamma^{(1)} = \{\boldsymbol{x} \mid \varphi^{(2)}(\boldsymbol{x}) = C_2^{(0)}\}$ и некоторой линии $\gamma^{(2)} = \{\boldsymbol{x} \mid x_2 = \mu(x_1)\}$, $\mu \in C^2(\mathbb{R})$, которая выбирается таким образом, чтобы она пересекалась с $\gamma^{(1)}$ только в одной точке $M^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) \in \mathbb{R}^2$, $x_1 \in \mathbb{R}$, рис. 1.

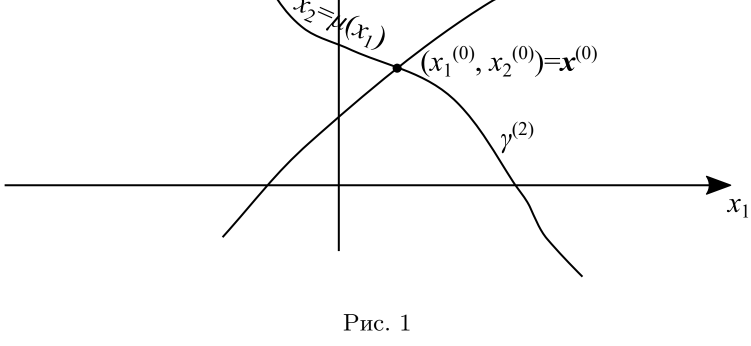

Рис. 1

Здесь $a(\boldsymbol{x}) \neq 0$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$. Если $c(\boldsymbol{x}) \neq 0$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$, то линию $\gamma^{(2)}$ можно представить в виде $\gamma^{(2)} = \{\boldsymbol{x} \mid x_1 = \tilde{\mu}(x_2)\}$, $\tilde{\mu} \in C^2(\mathbb{R})$. Если для некоторых $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ $a(\boldsymbol{x}) = 0$, а для других $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ $c(\boldsymbol{x}) = 0$, но $a^2(\boldsymbol{x}) + c^2(\boldsymbol{x}) \neq 0$, то в этом случае рассматриваем в совокупности предыдущие случаи.

Определение. *Функцию u из класса $C^2(\mathbb{R}^2)$ назовем классическим решением задачи (1), (5), (6), если она удовлетворяет уравнению (1) и условиям (5), (6).*

2. Интегральное уравнение. Пусть $a(\boldsymbol{x}) \neq 0$ для любых независимых переменных $\boldsymbol{x}$ на плоскости $\mathbb{R}^2$ и заданные функции уравнения (1) достаточно гладкие, например, a, b, c, $\mathcal{L}^{(1)}$ являются функциями из класса $C^2(\mathbb{R}^2)$. Согласно условию 2 уравнение (4) имеет два семейства характеристик [1]

$$\varphi^{(j)}(\boldsymbol{x}) = C_j, \quad j = 1, 2.$$

Через полученные функции делаем замену независимых переменных $\boldsymbol{y}$ через старые $\boldsymbol{x}$

$$y_1 = \varphi^{(1)}(\boldsymbol{x}), \quad y_2 = \varphi^{(2)}(\boldsymbol{x}). \tag{7}$$

Замена (7) является невырожденной [1] и $y_j \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Следовательно, из (7) имеем обратную замену, т. е.

$$x_j = \tilde{\varphi}^{(j)}(\boldsymbol{y}), \quad j = 1, 2.$$

С помощью замены (7) относительно функции $v(\boldsymbol{y}) = u(\boldsymbol{x})$ уравнение приведется ко второму каноническому виду

$$\partial_{y_1}\partial_{y_2} v + \mathcal{L}^{(2)}(\boldsymbol{y}, v) = g(\boldsymbol{y}). \tag{8}$$

Условия (5), (6) преобразуются следующим образом:

$$v(y_1, y_2 = C^{(0)}) = \xi^{(1)}(y_1), \quad y_1 \in \mathbb{R}, \tag{9}$$

$$v(y_1 = \nu(y_2), y_2) = \xi^{(2)}(x_1), \quad y_2 \in \mathbb{R}, \tag{10}$$

где $y_1 = \nu(y_2)$ – линия, в которую переходит $\gamma^{(2)}$ при замене (7) в системе координат y_1 и y_2. На линию $\gamma^{(2)}$ налагаем ограничения в виде условия.

Условие 3. *Линия $\gamma^{(2)}$ такова, что функция ν из класса $C^2(\mathbb{R})$, имеет обратную функцию $y_2 = \nu^{-1}(y_1)$ и производная $\mathrm{d}\nu^{-1} \neq 0$ для любого значения $y_1 \in \mathbb{R}$, рис. 2.*

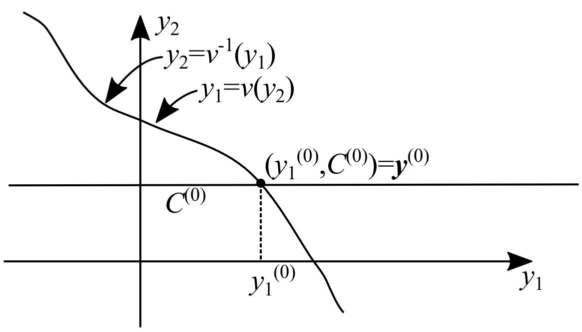

Рис. 2

Так как замена (7) является невырожденной, т. е. якобиан не равен нулю для всех $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$, то оператор $\mathcal{L}^{(2)}$ удовлетворяет условию 1, возможно с другой константой L.

Теорема 1. *Пусть функции* a, b, c, $\mathcal{L}^{(1)}$, $\psi^{(j)}$, $j=1,2$, *из класса* $C^2(\mathbb{R}^2)$, f *– из класса* $C^1(\mathbb{R}^2)$. *Если* u *является классическим решением задачи (1), (5), (6), то* $v(\boldsymbol{y}) = u(\boldsymbol{x})$ *является классическим решением задачи (8)–(10). И наоборот, классическое решение задачи (8)–(10) является классическим решением* $u(\boldsymbol{x}) = v(\boldsymbol{y})$ *задачи (1), (5), (6).*

Так как u – классическое решение задачи (1), (5), (6), то

$$\psi^{(1)}(\boldsymbol{x}^{(0)}) = \psi^{(2)}(\boldsymbol{x}^{(0)}). \tag{11}$$

Следовательно, и для решения задачи (8)–(10) имеем условие согласования

$$\xi^{(1)}(y_1^{(0)}) = \xi^{(2)}(C^{(0)}). \tag{12}$$

Условия согласования (12) (условие (11)) является не только необходимым, но и достаточным условием существования классического решения задачи (1), (5), (6) (задачи (8)–(10)). Достаточность этих условий будет доказана при исследовании классического решения задачи (8)–(10).

Таким образом, рассматриваем классическое решение задачи (8)–(10).

Введем дополнительные обозначения и функции следующим образом:

$$\partial_{y_1} v(\boldsymbol{y}) = w^{(1)}(\boldsymbol{y}), \quad \partial_{y_2} v(\boldsymbol{y}) = w^{(2)}(\boldsymbol{y}),$$

и сведем уравнение (8) к системе интегральных уравнений второго рода

$$w^{(1)}(\boldsymbol{y}) = \mathrm{d}\xi^{(2)}(\mathrm{y}_1) + \int\limits_{\mathrm{C}^{(0)}}^{\mathrm{y}_2} (\mathrm{g}(\mathrm{y}_1, \mathrm{z}) - \mathcal{L}^{(2)}(\mathrm{y}_1, \mathrm{z}, \mathrm{v}(\mathrm{y}_1, \mathrm{z}), \mathrm{w}^{(1)}(\mathrm{y}_1, \mathrm{z}), \mathrm{w}^{(2)}(\mathrm{y}_1, \mathrm{z})))\mathrm{dz},$$

$$w^{(2)}(\boldsymbol{y}) = \mathrm{d}\xi^{(1)}(\mathrm{y}_2) + \int\limits_{\nu^{-1}(\mathrm{y}_1)}^{\mathrm{y}_1} (\mathrm{g}(\mathrm{z}, \mathrm{y}_2) - \mathcal{L}^{(2)}(\mathrm{z}, \mathrm{y}_2, \mathrm{v}(\mathrm{z}, \mathrm{y}_2), \mathrm{w}^{(1)}(\mathrm{z}, \mathrm{y}_2), \mathrm{w}^{(2)}(\mathrm{z}, \mathrm{y}_2)))\mathrm{dz}, \tag{13}$$

$$v(\boldsymbol{y}) = \xi^{(2)} + \int\limits_{C^{(0)}}^{y_2} w^{(2)}(y_1, z)\mathrm{dz}.$$

Теорема 2. *Если* $v, a, b, c, \mathcal{L}^{(1)}, \psi^{(j)} \in C^2(\mathbb{R}^2)$, $j=1,2$, $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$, *то задача (8)–(10) и система уравнений (13) эквивалентны.*

Теорема 3. *Если* $v, a, b, c, \mathcal{L}^{(1)}, \psi^{(j)} \in C^2(\mathbb{R}^2)$, $j=1,2$, $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$, *то существует единственное решение* $v, w^{(1)}, w^{(2)} \in C(\mathbb{R}^2)$ *системы уравнений (13), а также* $\partial_{y_1}\partial_{y_2} v \in C(\mathbb{R}^2)$ *и функция* v *является решением задачи (8)–(10).*

Литература

1. Корзюк В. И. *Уравнения математической физики.* М.: Ленанд, 2021.

2. Корзюк В. И., Ковнацкая О. А., Севастюк В. А. *Задача Гурса на плоскости для квазилинейного гиперболического уравнения* // Доклады Национальной академии наук Беларуси. 2022. Т. 66. № 4. С. 391–396.