ПРОИЗВОЛЬНОГО ПОРЯДКА ГЛАДКОСТИ КЛАССИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ВТОРОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ В ЧЕТВЕРТИ ПЛОСКОСТИ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

В. И. Корзюк, И. С. Козловская

Обозначим через $C^k\left(\bar{Q}\right)$ множество непрерывных функций, для которых непрерывные до порядка k включительно производные, заданных на замыкании $\bar{Q}$ области Q. В данной работе построено в аналитическом виде произвольного порядка k гладкости классическое решение второй смешанной задачи в четверти плоскости для волнового уравнения в классе $C^k\left(\bar{Q}\right)$, где $k \in N$, $k \geq 2$, а также выписаны необходимые и достаточные условия согласования на заданные функции, при выполнении которых существует классическое решение поставленной задачи.

Постановка задачи. В замыкании $\bar{Q} = [0,\infty) \times [0,\infty)$ области $Q = (0,\infty) \times (0,\infty)$, представляющей четверть плоскости двух переменных $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$ найти решение u уравнения

$$\left(\partial^2_{x_1} u - a^2 \partial^2_{x_2} u\right)(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} = (x_1, x_2) \in \bar{Q}, \tag{1}$$

удовлетворяющие на части границы ∂Q области Q условиям Коши

$$u(0, x_2) = \varphi(x_2),\ \partial_{x_1} u(0, x_2) = \psi(x_2),\ x_2 \in [0, \infty), \tag{2}$$

на второй части ∂Q – условиям Неймана

$$\partial_{\boldsymbol{\nu}} u(x_1, 0) = \partial_{x_2} u(x_1, 0) = \mu(x_1), \quad x_1 \in [0, \infty), \tag{3}$$

где $\boldsymbol{\nu} = (0, 1)$ – единичный вектор внешней нормали в точках полупрямой $\Gamma = \{\boldsymbol{x} |\, x_2 = = 0, x_1 \in \in [0, \infty)\}$, f, φ, ψ, μ – заданные функции на соответствующих областях их определения (1) – (3).

Как известно, решение уравнения (1) представляется в виде

$$u(\boldsymbol{x}) = g^{(1)}(x_2 - ax_1) + g^{(2)}(x_2 + ax_1) + V_p(\boldsymbol{x}), \tag{4}$$

где произвольные функции $g^{(j)}$, $j = 1, 2$, из класса C^k и области определения $D\left(g^{(1)}\right) = = C^k(\mathbb{R})$, $D\left(g^{(2)}\right) = C^k\left([0, \infty)\right)$ для любого $\boldsymbol{x} \in \bar{Q}$, V_p – частное решение уравнения (1) из класса $C^k\left(\bar{Q}\right)$. Для определения V_p характеристикой $x_2 - ax_1 = 0$ область Q разбивается на две подобласти $Q^{(1)} = \{\boldsymbol{x} \in Q |\, x_2 - ax_1 > 0\}$, $Q^{(2)} = \{\boldsymbol{x} \in Q |\, x_2 - ax_1 < 0\}$ Тогда

$$V_p(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} v_p^{(1)}(\boldsymbol{x}), & \boldsymbol{x} \in \overline{Q^{(1)}}, \\ V_p^{(2)}(\boldsymbol{x}x), & \boldsymbol{x} \in \overline{Q^{(2)}}, \end{cases} \tag{5}$$

где

$$V_p^{(2)}(\boldsymbol{x}) = v_p^{(2)}(\boldsymbol{x}) + \sum_{j=1}^{k} \frac{b^{(j)}}{j!}(x_2 - ax_1)^j. \tag{6}$$

$$v_p^{(1)}(\boldsymbol{x}) = -\frac{1}{4a^2} \int\limits_0^{x_2 - ax_1} \left(\int\limits_{x_2 - ax_1}^{x_2 + ax_1} f\left(\frac{\eta - \xi}{2a}, \frac{\eta + \xi}{2}\right) d\eta \right) d\xi -$$

$$-\frac{1}{4a^2} \int\limits_0^{x_2 - ax_1} \left(\int\limits_0^{\eta} f\left(\frac{\eta - \xi}{2a}, \frac{\eta + \xi}{2}\right) d\xi \right) d\eta +$$

$$+\frac{1}{4a^2}\int\limits_0^{x_2+ax_1}\left(\int\limits_0^{\eta} f\left(\frac{\eta-\xi}{2a},\frac{\eta+\xi}{2}\right)d\xi\right)d\eta, \boldsymbol{x}\in\overline{Q^{(1)}},$$

$$v_p^{(2)}(\boldsymbol{x})=-\frac{1}{4a^2}\int\limits_0^{x_2-ax_1}\left(\int\limits_{ax_1-x_2}^{x_2+ax_1} f\left(\frac{\eta-\xi}{2a},\frac{\eta+\xi}{2}\right)d\eta\right)d\xi+ \tag{7}$$

$$+\frac{1}{4a^2}\int\limits_0^{x_2-ax_1}\left(\int\limits_{-\eta}^{\eta} f\left(\frac{-\eta-\xi}{2a},\frac{-\eta+\xi}{2}\right)d\xi\right)d\eta+$$

$$+\frac{1}{4a^2}\int\limits_0^{x_2-ax_1}\left(\int\limits_0^{\eta} f\left(\frac{-\eta-\xi}{2a},\frac{-\eta+\xi}{2}\right)d\xi\right)d\eta+$$

$$+\frac{1}{4a^2}\int\limits_0^{x_2+ax_1}\left(\int\limits_0^{\eta} f\left(\frac{\eta-\xi}{2a},\frac{\eta+\xi}{2}\right)d\xi\right)d\eta+C^{(1,2)},\quad \boldsymbol{x}\in\overline{Q^{(2)}}.$$

Функции $g^{(j)}(j=1,2)$ определяются формулами

$$g^{(2)}(z)=\frac{1}{2}\varphi(z)+\frac{1}{2a}\int\limits_0^z\psi(\xi)d\xi+C, z\in[0,\infty). \tag{8}$$

где C – произвольная постоянная из $\mathbb{R}$.

$$g^{(1)}(z)=\begin{cases} g^{(1,1)}(z)=\frac{1}{2}\varphi(z)-\frac{1}{2a}\int\limits_0^z\psi(\xi)d\xi-C, z\in(0,\infty),\\ g^{(1,2)}(z)=\int\limits_0^z\mu\left(-\frac{\xi}{a}\right)d\xi+\frac{1}{2}\varphi(-z)-\frac{1}{2a}\int\limits_0^z\psi(-\xi)d\xi+\tilde{C}, z\in(-\infty,0),\end{cases} \tag{9}$$

где $\tilde{C}$ – произвольная постоянная из $\mathbb{R}$, не зависящая от C.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть заданные функции задачи (1) – (3) удовлетворяют следующим условиям гладкости:* $f\in C^{k-1}\left(\bar{Q}\right)$, $\varphi,\mu\in C^k\left([0,\infty)\right)$, $\psi\in C^{k-1}\left([0,\infty)\right)$. *Для каждого числа* $k=2,3,4,\ldots$ *существует единственное решение* $u:\mathbb{R}^2\supset\bar{Q}\ni\boldsymbol{x}\to u(\boldsymbol{x})\in\mathbb{R}$ *задачи (1) – (3) из класса* $C^k\left(\bar{Q}\right)$ *тогда и только тогда, когда выполняются условия согласования:*

$$d^m\varphi(0)-\left(\frac{1}{a}\right)^{m-1}d^{m-1}\mu(0)=0,\quad m=1,3,\ldots\le k,$$

$$d^{m-1}\psi(0)-\left(-\frac{1}{a}\right)^{m-2}d^{m-1}\mu(0)=0,\quad m=2,4,\ldots\le k.$$

Решение непрерывно зависит от заданных функций и определяется формулой (4), частное решение V_p *– формулами (5), (6), (7),* $g^{(j)}(j=1,2)$ *– (8), (9).*

Литература

1. Корзюк В. И., Козловская И. С. *Классические решения задач для гиперболических уравнений. Курс лекций в 10 частях. Часть 1.* Минск: БГУ. 2017
2. Корзюк В. И., Козловская И. С. *Классические решения задач для гиперболических уравнений. Курс лекций в 10 частях. Часть 2.* Минск: БГУ. 2020
3. Корзюк В. И., Козловская И. С. *Классические решения задач для гиперболических уравнений. Курс лекций в 10 частях. Часть 3.* Минск: БГУ. 2022

СТРУКТУРА ПО ПРАНДТЛЮ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О ТЕПЛОВОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ В ТУРБУЛЕНТНОМ СЖИМАЕМОМ ТЕЧЕНИИ

В. Н. Лаптинский

Рассмотрим задачу [1, с. 380], [2, с. 630]

$$\rho u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + \rho u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} = -\frac{dP}{dx} + \frac{\partial}{\partial y}\left((\mu + \mu_t) \frac{\partial u_x}{\partial y} \right), \tag{1}$$

$$\frac{\partial \rho u_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho u_y}{\partial y} = 0, \tag{2}$$

$$\rho c_p u_x \frac{\partial T}{\partial x} + \rho c_p u_y \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left((\lambda + \lambda_t) \frac{\partial T}{\partial y} \right) + (\mu + \mu_t) \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} \right)^2 + u_x \frac{\partial P}{\partial x}, \tag{3}$$

$$u_x|_{y=0} = 0, \qquad u_y|_{y=0} = 0, \qquad u_x|_{y=\delta(x)} = U\,(x)\,, \tag{4}$$

$$T|_{y=0} = T_0(x), \qquad T|_{y=\delta_T(x)} = T_1(x); \tag{5}$$

здесь и далее по тексту знак осреднения опущен.

Соотношения (1) – (5) представляют собой задачу о тепловом пограничном слое конечной толщины $\delta_T(x)$ в турбулентном сжимаемом течении, при этом в полном напряжении трения $\tau = \tau_l + \tau_t$ и полной плотности потока тепла $q = q_l + q_t$, согласно гипотезе Л. Прандтля, приняты выражения

$$\tau = \mu \frac{\partial u_x}{\partial y} + \rho l^2(y) \left| \frac{\partial u_x}{\partial y} \right| \frac{\partial u_x}{\partial y}, \tag{6}$$

$$-q = \lambda \frac{\partial T}{\partial y} + \rho c_p l_1^2(y) \left| \frac{\partial u_x}{\partial y} \right| \frac{\partial T}{\partial y}, \tag{7}$$

где $\tau_l = \mu \partial u_x / \partial y$, $q_l = \lambda \partial T / \partial y$ — ламинарные составляющие соответственно для τ, q.

Искомыми величинами являются функции $\delta_T\,(x)$ и $\alpha_0\,(x)$ – коэффициент теплоотдачи, при этом соотношения (1), (2), (4) представляют собой самостоятельную задачу о динамическом пограничном слое конечной толщины $\delta\,(x)$, определению подлежат функции $\delta\,(x)$ и $\tau_0\,(x)$ – касательное напряжение.

Структура $\delta\,(x)$, $\tau_0\,(x)$ в сжимаемом пограничном слое изучена в работе [3]. В случае несжимаемого течения структура $\delta_T\,(x)$, $\alpha_0\,(x)$ рассмотрена в [4].

Функции $\delta\,(x)$, $\delta_T\,(x)$, $\tau_0\,(x)$, $\alpha_0\,(x)$ имеют большое значение в теории пограничного слоя, особенно для движения сжимаемой среды. При таких движениях тепловой пограничный слой играет основную роль в теплопередаче между текущей средой и обтекаемым телом. При больших числах Маха тепло, выделяющееся вследствие трения