Литература

1. Корзюк В. И., Козловская И. С. *Классические решения задач для гиперболических уравнений. Курс лекций в 10 частях. Часть 1.* Минск: БГУ. 2017
2. Корзюк В. И., Козловская И. С. *Классические решения задач для гиперболических уравнений. Курс лекций в 10 частях. Часть 2.* Минск: БГУ. 2020
3. Корзюк В. И., Козловская И. С. *Классические решения задач для гиперболических уравнений. Курс лекций в 10 частях. Часть 3.* Минск: БГУ. 2022

СТРУКТУРА ПО ПРАНДТЛЮ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О ТЕПЛОВОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ В ТУРБУЛЕНТНОМ СЖИМАЕМОМ ТЕЧЕНИИ

В. Н. Лаптинский

Рассмотрим задачу [1, с. 380], [2, с. 630]

$$\rho u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + \rho u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} = -\frac{dP}{dx} + \frac{\partial}{\partial y}\left((\mu + \mu_t) \frac{\partial u_x}{\partial y} \right), \tag{1}$$

$$\frac{\partial \rho u_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho u_y}{\partial y} = 0, \tag{2}$$

$$\rho c_p u_x \frac{\partial T}{\partial x} + \rho c_p u_y \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left((\lambda + \lambda_t) \frac{\partial T}{\partial y} \right) + (\mu + \mu_t) \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} \right)^2 + u_x \frac{\partial P}{\partial x}, \tag{3}$$

$$u_x|_{y=0} = 0, \qquad u_y|_{y=0} = 0, \qquad u_x|_{y=\delta(x)} = U(x), \tag{4}$$

$$T|_{y=0} = T_0(x), \qquad T|_{y=\delta_T(x)} = T_1(x); \tag{5}$$

здесь и далее по тексту знак осреднения опущен.

Соотношения (1) – (5) представляют собой задачу о тепловом пограничном слое конечной толщины $\delta_T(x)$ в турбулентном сжимаемом течении, при этом в полном напряжении трения $\tau = \tau_l + \tau_t$ и полной плотности потока тепла $q = q_l + q_t$, согласно гипотезе Л. Прандтля, приняты выражения

$$\tau = \mu \frac{\partial u_x}{\partial y} + \rho l^2(y) \left| \frac{\partial u_x}{\partial y} \right| \frac{\partial u_x}{\partial y}, \tag{6}$$

$$-q = \lambda \frac{\partial T}{\partial y} + \rho c_p l_1^2(y) \left| \frac{\partial u_x}{\partial y} \right| \frac{\partial T}{\partial y}, \tag{7}$$

где $\tau_l = \mu \partial u_x / \partial y$, $q_l = \lambda \partial T / \partial y$ — ламинарные составляющие соответственно для τ, q.

Искомыми величинами являются функции $\delta_T(x)$ и $\alpha_0(x)$ – коэффициент теплоотдачи, при этом соотношения (1), (2), (4) представляют собой самостоятельную задачу о динамическом пограничном слое конечной толщины $\delta(x)$, определению подлежат функции $\delta(x)$ и $\tau_0(x)$ – касательное напряжение.

Структура $\delta(x)$, $\tau_0(x)$ в сжимаемом пограничном слое изучена в работе [3]. В случае несжимаемого течения структура $\delta_T(x)$, $\alpha_0(x)$ рассмотрена в [4].

Функции $\delta(x)$, $\delta_T(x)$, $\tau_0(x)$, $\alpha_0(x)$ имеют большое значение в теории пограничного слоя, особенно для движения сжимаемой среды. При таких движениях тепловой пограничный слой играет основную роль в теплопередаче между текущей средой и обтекаемым телом. При больших числах Маха тепло, выделяющееся вследствие трения между движущимся телом и средой, приводит к сильному нагреванию поверхности обтекаемого тела. Расчет этого нагревания представляет собой трудную задачу, особенно для авиационной и космической техники («тепловой барьер») [2, с.17].

Основы полуэмпирической теории теплообмена в турбулентном потоке были заложены Л. Прандтлем и Д. Тейлором [1, с. 7], [2, с. 521]. Однако Л. Прандтль первым предложил свою гипотезу. Вследствие чрезвычайно сложной картины турбулентного течения и отсутствия рациональных теорий турбулентности, решение задачи в строгой математической постановке в настоящее время невозможно. При решении отдельных задач вводится много предложений и упрощающих допущений, поэтому в принятых методах расчета турбулентного теплообмена решающее значение приобретает эксперимент [1, с. 380], [2, с. 520], [5].

В предлагаемой работе на основе метода [6] изучена структура, а также структурные свойства решения комплексной задачи (1) – (7). В [3] с помощью величины ударной вязкости пограничного слоя при сжимаемом течении получены соотношения

$$\delta\,(x) = \frac{\nu_0}{U}\ h_\delta, \tag{8}$$

$$\tau_0\,(x) = \rho_0\ U^2\ h_\tau, \tag{9}$$

где ν_0 , ρ_0 – значения коэффициента кинематической вязкости и плотности на обтекаемой поверхности,

$$h_\delta = \left((c_\tau - c_l)\,(c_l - \widetilde{c}_l)\right)/\ c_t, \tag{10}$$

$$h_\tau = c_t/\left((c_\tau - c_l)\,(c_l - \widetilde{c}_l)^2\right); \tag{11}$$

здесь $c_\tau(x)$, $c_l(x)$, $\widetilde{c}_l(x)$, $c_t(x)$ – структурные функции, определяемые на основе безразмерных интегральных средних $\overline{\tau},\ \overline{\tau}_l,\ \overline{\tau}_t$ на промежутке $[0, \delta\,(x)]$ соответственно напряжений трения $\tau,\ \tau_l,\ \tau_t$.

В случае несжимаемого течения $\widetilde{c}_l(x) \equiv 0$, при этом функции c_τ , c_l , c_t принимают вид [7], соответствующий этому течению.

Величины δ , τ_0 на основании (8) – (11) связаны соотношениями

$$\delta\tau_0 = \mu_0 U h_\delta h_\tau = \mu_0 U/(c_l - \widetilde{c}_l), \tag{12}$$

$$\delta^2\tau_0 = \nu_0\mu_0 h_\delta^2 h_\tau = \nu_0\mu_0 U\,(c_\tau - \widetilde{c}_l)/c_t. \tag{13}$$

На основе (12) имеем величину ударной вязкости $\widetilde{a}$, определяемую формулой

$$\widetilde{a} = \frac{\delta\tau_0}{h_\delta h_\tau} = \mu_0 U.$$

Далее наряду с (7) рассмотрим функцию

$$\widetilde{q}(x,y) = \lambda\frac{\partial\widetilde{T}}{\partial y} + \rho c_p l_1^2(y)\left|\frac{\partial u_x}{\partial y}\right|\ \frac{\partial\widetilde{T}}{\partial y}, \tag{14}$$

где $\widetilde{T}$ – безразмерная температура [1, с.237], $\widetilde{T} = (T - T_0)/(T_1 - T_0)$.

Поскольку $\widetilde{q}(x,0) = \alpha_0(x)$, то целесообразно ввести полную теплоотдачу $\alpha(x,y) = \widetilde{q}(x,y)$ турбулентного пограничного слоя при помощи выражения

$$\alpha(x,y) = \alpha_l(x,y) + \alpha_t(x,y), \tag{15}$$

где $\alpha_l = \lambda\partial\widetilde{T}(x,y)/\partial y, \quad \alpha_t = \rho_p l_1^2(y)\,|\partial u_x/\partial y|\,\partial\widetilde{T}/\partial y$.

На основе (15) имеем для (1) – (7)

$$\tau_0 = \frac{\mu_0 a_0}{\delta_T^2} F(x), \tag{16}$$

$$\alpha_0 = \frac{\lambda_0}{\delta_T} \cdot \frac{1}{(r_l - \widetilde{r}_l)}, \tag{17}$$

где $F(x) = (r_\alpha - r_l)/r_t$; здесь r_α, r_l, $\widetilde{r}_l$, r_t – структурные функции, определяемые на основе безразмерных интегральных средних $\overline{\alpha}$, $\overline{\alpha}_l$, $\overline{\alpha}_t$ на промежутке $[0, \delta_T(x)]$ теплопередач соответственно α, α_l, α_t, при этом r_α, r_l, r_t – являются постоянными величинами для профилей скорости и температуры автомодельного типа [1, с. 354, с. 394], [2, с. 573, с. 604]. В случае несжимаемого течения $\widetilde{r}_l = 0$, при этом функции r_α, r_l, r_t принимают вид, соответствующий этому течению [4].

На основании (13), (16), получим формулу типа [8, с. 120], используя $Pr = \nu_0/a_0$,

$$\delta = \delta_T (Pr \cdot H/F)^{1/2}, \tag{18}$$

где $H = h_\delta^2 h_\tau = h_\delta/(c_l - \widetilde{c}_l)$.

Аналогично из (12), (16) имеем

$$\delta = \delta_T^2 \frac{U}{a_0} \frac{1}{(c_l - \widetilde{c}_l)\, F}. \tag{19}$$

Поскольку формулы (8), (9) содержат только физические параметры течения, то естественно получить аналогичную структуру для δ_T, α_0. Из (8), (18) имеем

$$\delta_T = \frac{\nu_0 h_\delta}{U} \left(\frac{F}{Pr \cdot H} \right)^{1/2}. \tag{20}$$

Далее на основании (17), (20) получим

$$\alpha_0 = \frac{\lambda_0 U}{\nu_0 (r_l - \widetilde{r}_l) h_\delta} \left(\frac{Pr \cdot H}{F} \right)^{1/2}. \tag{21}$$

Соотношения (8), (9), (20), (21) описывают структуру решения задачи (1) – (7). Формулы (12), (13), (16) – (19) относятся к структурным свойствам решения, при этом структурные функции являются постоянными в случае профилей скорости и температуры автомодельного типа. Связь между τ_0 и α_0 характеризует выражение, вытекающее из (16), (17),

$$\tau_0 = \frac{\alpha_0^2 \mu_0 a_0}{{\lambda_0}^2} (r_l - \widetilde{r}_l)^2 F.$$

Замечание. Получить точное аналитическое решение задачи принципиально невозможно. Здесь приведена его аналитическая структура и некоторые свойства. Формулы (8), (9), (17), (20) описывают влияние физических параметров задачи на формирование пограничного слоя. Они соответствуют установленным физическим реалиям теории пограничного слоя. Структурные функции могут быть получены с помощью численных методов.

Литература

1. *Основы теплопередачи в авиационной и ракетно-космической технике* / В. С. Авдуевский [и др.]. М. : Машиностроение, 1975.

2. Шлихтинг Г. *Теория пограничного слоя.* М.: Наука. 1974.

3. Лаптинский В. Н. *Структура по Прандтлю решения задачи о динамическом турбулентном пограничном слое в сжимаемом течении жидкости* // Актуальные проблемы науки и техники. Материалы II Междунар. науч.-технич. конф., посвящ. 70-летию ИМИ - ИжГТУ и 60-летию СПИ (филиал) ФГБОУ ВО "ИжГТУ имени М.Т. Калашникова". Ижевск. 2022. С. 60-64.

4. Лаптинский В. Н. *К задаче о тепловом пограничном слое в турбулентном течении* // Актуальные проблемы науки и техники. Материалы II Междунар. науч.-технич. конф., посвящ. 70-летию ИМИ - ИжГТУ и 60-летию СПИ (филиал) ФГБОУ ВО "ИжГТУ имени М.Т. Калашникова". Ижевск. 2022. С. 50-54.

5. Репик Е. У., Соседко Ю. П. *Турбулентный пограничный слой. Методика и результаты экспериментальных исследований.* М.: Физматлит. 2007.

6. Лаптинский В. Н. *Об одном аналитическом методе решения задачи о динамическом ламинарном пограничном слое в автомодельном случае* // Ученые записки ЦАГИ. 2013. Т. XLIV. № 5. С. 72–93.

7. Лаптинский В. Н. *Структура по Прандтлю – Карману решения задачи о динамическом турбулентном пограничном слое* // Актуальные проблемы науки и техники. Материалы I Междунар. науч.-технич. конф. Ижевск, 2021. С. 86–90.

8. Кутателадзе С.С. *Основы теории теплообмена.* М.: Атомиздат. 1979.

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПЯТОГО ПОРЯДКА С ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКИМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ ОПЕРАТОРОМ

Л.Б. Миронова

Здесь рассматривается уравнение с переменными коэффициентами

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\right)(u_{xxyy}+a_{21}u_{xxy}+a_{12}u_{xyy}+a_{11}u_{xy}+a_{20}u_{xx}+a_{02}u_{yy}+a_{10}u_x+a_{01}u_y+a_{00}u)=0. \quad (1)$$

Дифференциальный оператор уравнения (1) представляет собой произведение оператора первого порядка и псевдопараболического оператора четвертого порядка. Краевая задача для факторизованного уравнения с псевдопараболическим оператором третьего порядка рассмотрена в [1], где решение построено в терминах функции Римана соответствующего псевдопараболического дифференциального оператора третьего порядка. Подобный подход применяется в настоящей работе к уравнению (1). Отметим, что задачи для факторизованных уравнений с операторами Бианки исследованы в работах [2, глава 4], [3], [4].

Пусть $D=\{0<x<x_1,\,0<y<y_1\}$, а X, Y — части ∂D, лежащие на осях x, y соответственно. Отрезок характеристики $y=x$, расположенный внутри D, обозначим через M.

Задача. Найти в D функцию, являющуюся в $D\setminus M$ регулярным решением уравнения (1) и удовлетворяющую условиям

$$u\,|_{\overline{Y}}=\varphi_1(y),\;\; u\,|_{\overline{X}}=\varphi_2(x),\;\; \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{\overline{Y}}=\psi_1(y),\;\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{\overline{X}}=\psi_2(x),$$

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{\overline{Y}}=\lambda_1(y),\;\left.\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|_{\overline{Y}}=\lambda_2(y),\;\varphi_1,\,\psi_1,\,\lambda_1\in C^2([0,y_1]),\;\varphi_2,\,\psi_2,\,\lambda_2\in C^2([0,x_1]),$$