$$\varphi_1(0)=\varphi_2(0),\ \psi_1(0)=\varphi_2'(0),\ \varphi_1'(0)=\psi_2(0),\ \lambda_1(0)=\varphi_2''(0),\ \lambda_2(0)=\varphi_1''(0).$$

Получены достаточные условия, обеспечивающие существование и единственность решения задачи. Решение задачи построено в терминах функции Римана соответствующего псевдопараболического дифференциального оператора четвертого порядка, определение которой приведено, например, в [4, с. 127], [5, с. 139].

Литература

1. Миронова Л. Б. *Задача для факторизованного уравнения с псевдопараболическим дифференциальным оператором* // Известия вузов. Математика. 2020. № 8. С. 44–49.

2. Жегалов В. И., Миронов А. Н., Уткина Е. А. *Уравнения с доминирующей частной производной.* Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 2014.

3. Жегалов В. И., Миронов А. Н. *К пространственным граничным задачам для гиперболических уравнений* // Дифференциалные уравнения. 2010. — Т. 46. № 3. С. 364–371.

4. Миронов А. Н. *Применение метода Римана к факторизованному уравнению в n-мерном пространстве* // Известия вузов. Математика. 2012. № 1. С. 54–60.

5. Жегалов В. И., Миронов А. Н. *Дифференциальные уравнения со старшими частными производными.* Казань: Казанск. матем. об-во, 2001.

РАЗРЕШИМОСТЬ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С НЕЛОКАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Ж.А. Отарова, А.Б. Бекиев

Математическое моделирование многих процессов механики, физики, биологии нередко приводит к решению задач с нелокальными условиями. Различные краевые задачи для, в которых краевые условия представлены как соотношения между значениями искомых функций, вычисленные в различных точках, лежащих на границе или внутри рассматриваемой области исследованы многими авторами. В данной работе рассматривается одна краевая задача с нелокальным граничным условием для уравнения четвертого порядка.

В области $\Omega=\{(x,t):0<x<1,\ \ -\alpha<t<\beta\}$ рассмотрим уравнение

$$Lu\equiv u_{xxxx}(x,t)+\operatorname{sgn}t\cdot[u_t(x,t)-u_{tt}(x,t)]+b^2u(x,t)=f(x,t),$$

где b - заданное число, $f(x,t)$ – заданная функция.

Задача. Найти функцию $u(x,t)$ удовлетворяющую следующим условиям:

$$u(x,t)\in C^{3,1}_{x,t}\left(\bar{\Omega}\right)\cap C^{4,2}_{x,t}\left(\Omega_+\cup\Omega_-\right), \tag{1}$$

$$Lu(x,t)\equiv f(x,t),\ (x,t)\in\Omega_+\cup\Omega_-, \tag{2}$$

$$u(0,t)=0,\ u_x(0,t)=u_x(1,t),\ u_{xx}(1,t)=0,\ u_{xxx}(0,t)=u_{xxx}(1,t),\ -\alpha\leqslant t\leqslant\beta, \tag{3}$$

$$u(x,\ \beta)=\varphi(x),\ u(x,\ -\alpha)=\psi(x),\ \ 0\leqslant x\leqslant 1, \tag{4}$$

где $\Omega_+=\Omega\cap\{t>0\}$, $\Omega_-=\Omega\cap\{t<0\}$ и $\varphi(x)$, $\psi(x)$ - заданные достаточно гладкие функции.

Система функций

$$X_0(x)=2x,\ \ X_{2k-1}(x)=2\sin\lambda_k x,\ \ X_{2k}(x)=\frac{e^{\lambda_k x}-e^{\lambda_k(1-x)}}{e^{\lambda_k}-1}+\cos\lambda_k x, \tag{5}$$

$$Y_0(x)=1,\ Y_{2k-1}(x)=\frac{e^{\lambda_k x}+e^{\lambda_k(1-x)}}{e^{\lambda_k}-1}+\sin\lambda_k x,\ Y_{2k}(x)=2\cos\lambda_k x, \tag{6}$$

где $\lambda_k=2\pi k,\ k=1,2,...$ биортогональная и образуют базис Рисса в $L_2(0,\,1)$ [1,2].

Решение задачи ищется в виде ряда составленных из базисных функций Рисса (5). Единственность решения задачи, вытекает из полноты ортонормированных систем (6).

Теорема. *Если существует решение задачи (1)–(4), то оно единственно только тогда, когда выполнены условия*

$$\Delta_k(\alpha,\beta)=\mu_k\cos\frac{1}{2}\mu_k\alpha\cdot sh\frac{1}{2}v_k\beta+v_k sin\frac{1}{2}\mu_k\alpha\cdot ch\frac{1}{2}v_k\beta\neq 0$$

при всех $k\in N\cup\{0\}$, $v_k=\sqrt{4(\lambda_k^4+b^2)+1}$, $\mu_k=\sqrt{4(\lambda_k^4+b^2)-1}$, $\lambda_0=0$.

Литература

1. Berdyshev A. S., Cabada A., Kadirkulov B. J. *The Samarskii-Ionkin type problem for the fourth order parabolic equation with fractional differential operator* // Computers and Mathematics with Applications. 62 (2011). P. 3884-3893.

2. Кадиркулов Б. Ж. *Об одной обратной задаче для параболического уравнения четвертого порядка* // УзМЖ.-Ташкент. 2012. №1. С.74-80.

К ТЕОРИИ ЭНТРОПИЙНЫХ СУБ- И СУПЕРРЕШЕНИЙ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Е.Ю. Панов

В полупространстве $\Pi=(0,+\infty)\times\mathbb{R}^n$ рассмотрим нелинейное параболическое уравнение

$$u_t+\mathrm{div_x}(\varphi(\mathrm{u})-\mathrm{a(u)}\nabla_\mathrm{x}\mathrm{u})=0, \tag{1}$$

в котором вектор потока $\varphi(u)=(\varphi_1(u),\ldots,\varphi_n(u))\in C(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$ лишь непрерывен, а симметричная матрица диффузии $a(u)=(a_{ij}(u))_{i,j=1}^n$ измерима по Лебегу и ограничена: $a_{ij}(u)\in L^\infty(\mathbb{R})$, $i,j=1,\ldots,n$. Также предполагается, что матрица $a(u)\geq 0$ (неотрицательно определена). Так как матрица диффузии может иметь нетривиальное ядро, уравнение (1) является вырождающимся (гиперболическим-параболическим) уравнением. В частном случае $a\equiv 0$ оно превращается в закон сохранения первого порядка $u_t+\mathrm{div_x}\varphi(\mathrm{u})=0$. Уравнение (1) можно переписать (по крайне мере - формально) в дивергентной форме

$$u_t+\mathrm{div_x}\varphi(\mathrm{u})-\mathrm{D_x^2}\cdot\mathrm{A(u)}=0,$$

где $A'(u)=a(u)$, а оператор D_x^2 это “дивергенция второго порядка”:

$$D_x^2\cdot A(u)\doteq\sum_{i,j=1}^n\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}A_{ij}(u),\quad u=u(t,x),$$