Система функций

$$X_0(x) = 2x,\ \ X_{2k-1}(x) = 2\sin\lambda_k x,\ \ X_{2k}(x) = \frac{e^{\lambda_k x} - e^{\lambda_k(1-x)}}{e^{\lambda_k} - 1} + \cos\lambda_k x, \tag{5}$$

$$Y_0(x) = 1,\ Y_{2k-1}(x) = \frac{e^{\lambda_k x} + e^{\lambda_k(1-x)}}{e^{\lambda_k} - 1} + \sin\lambda_k x,\ Y_{2k}(x) = 2\cos\lambda_k x, \tag{6}$$

где $\lambda_k = 2\pi k,\ k = 1, 2, ...$ биортогональная и образуют базис Рисса в $L_2(0,\,1)$ [1,2].

Решение задачи ищется в виде ряда составленных из базисных функций Рисса (5). Единственность решения задачи, вытекает из полноты ортонормированных систем (6).

Теорема. *Если существует решение задачи (1)–(4), то оно единственно только тогда, когда выполнены условия*

$$\Delta_k(\alpha,\beta) = \mu_k \cos\frac{1}{2}\mu_k\alpha \cdot sh\frac{1}{2}v_k\beta + v_k sin\frac{1}{2}\mu_k\alpha \cdot ch\frac{1}{2}v_k\beta \neq 0$$

при всех $k \in N \cup \{0\}$, $v_k = \sqrt{4\left(\lambda_k^4 + b^2\right) + 1}$, $\mu_k = \sqrt{4\left(\lambda_k^4 + b^2\right) - 1}$, $\lambda_0 = 0$.

Литература

1. Berdyshev A. S., Cabada A., Kadirkulov B. J. *The Samarskii-Ionkin type problem for the fourth order parabolic equation with fractional differential operator* // Computers and Mathematics with Applications. 62 (2011). P. 3884-3893.

2. Кадиркулов Б. Ж. *Об одной обратной задаче для параболического уравнения четвертого порядка* // УзМЖ.-Ташкент. 2012. №1. С.74-80.

К ТЕОРИИ ЭНТРОПИЙНЫХ СУБ- И СУПЕРРЕШЕНИЙ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Е.Ю. Панов

В полупространстве $\Pi = (0, +\infty) \times \mathbb{R}^n$ рассмотрим нелинейное параболическое уравнение

$$u_t + \mathrm{div_x}(\varphi(\mathrm{u}) - \mathrm{a(u)}\nabla_\mathrm{x}\mathrm{u}) = 0, \tag{1}$$

в котором вектор потока $\varphi(u) = (\varphi_1(u), \ldots, \varphi_n(u)) \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ лишь непрерывен, а симметричная матрица диффузии $a(u) = (a_{ij}(u))_{i,j=1}^n$ измерима по Лебегу и ограничена: $a_{ij}(u) \in L^\infty(\mathbb{R})$, $i, j = 1, \ldots, n$. Также предполагается, что матрица $a(u) \geq 0$ (неотрицательно определена). Так как матрица диффузии может иметь нетривиальное ядро, уравнение (1) является вырождающимся (гиперболическим-параболическим) уравнением. В частном случае $a \equiv 0$ оно превращается в закон сохранения первого порядка $u_t + \mathrm{div_x}\varphi(\mathrm{u}) = 0$. Уравнение (1) можно переписать (по крайне мере - формально) в дивергентной форме

$$u_t + \mathrm{div_x}\varphi(\mathrm{u}) - \mathrm{D_x^2} \cdot \mathrm{A(u)} = 0,$$

где $A'(u) = a(u)$, а оператор D_x^2 это “дивергенция второго порядка”:

$$D_x^2 \cdot A(u) \doteq \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} A_{ij}(u), \quad u = u(t,x),$$

что позволяет ввести понятие слабого решения. Мы будем исследовать задачу Коши для уравнения (1) с начальным условием

$$u(0,x)=u_0(x)\in L^\infty(\mathbb{R}^n). \tag{2}$$

Ввиду вырожденности уравнения, слабое решение задачи (1), (2) может быть не единственно и для корректной постановки этой задачи необходимо рассматривать более узкий класс энтропийных решений. Пусть функция $g(u)\in BV_{loc}(\mathbb{R})$ имеет ограниченную на любом отрезке вариацию. Определим ограниченный линейный оператор $T_g: C(\mathbb{R})/C\to$ $\to C(\mathbb{R})/C$, где C это пространство постоянных функций, в соответствии с равенством

$$T_g(f)(u)=g(u-)f(u)-\int\limits_0^u f(s)dg(s), \tag{3}$$

в котором $g(u-)=\lim\limits_{v\to u-}g(v)$, а интеграл в (3) понимается как

$$\int\limits_0^u f(s)dg(s)=\operatorname{sgn}u\int\limits_{J(u)} f(s)dg(s),$$

где $\operatorname{sgn}u=1$, $J(u)=[0,u)$, если $u>0$; $\operatorname{sgn}u=-1$, $J(u)=[u,0)$, если $u\le 0$. Заметим, что при $f\in C^1(\mathbb{R})$ оператор T_g однозначно определяется равенством $T_g(f)'(u)=$ $=g(u)f'(u)$ (в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$).

Фиксируем факторизацию матрицы диффузии $a(u)$ вида $a(u)=b^\top(u)b(u)$, где $b(u)=(b_{kj}(u))$, $k\in\overline{1,l}$, $j\in\overline{1,n}$, – $l\times n$-матрица с ограниченными и измеримыми компонентами $b_{kj}(u)$. Таким образом, справедливы равенства $a_{ij}(u)=\sum\limits_{k=1}^{l}b_{ki}b_{kj}$. Матрица $b(u)$ может рассматриваться как квадратный корень из $a(u)$. При $l=n$ можно выбрать $\mathrm{b(u)}=a(u)^{1/2}$. Напомним понятие энтропийного решения задачи (1), (2), предложенное в работе [1].

Определение. Функция $u=u(t,x)\in L^\infty(\Pi)$ называется энтропийным решением (кратко - э.р.) задачи (1), (2), если выполнены следующие условия:

(i) при всех $k=1,\dots,l$ распределения

$$\mathrm{div_x B_k(u(t,x))\in L^2_{loc}(\Pi)},$$

где векторы $B_k(u)=(B_{k1}(u),\dots,B_{kn}(u))$ таковы, что $B'_{ki}(u)=b_{ki}(u)$ в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, $i=1,\dots$ $\dots,n$;

(ii) для любой функции $g(u)\in C^1(\mathbb{R})$ и всех $k=1,\dots,l$

$$\mathrm{div_x T_g(B_k)(u(t,x))=g(u(t,x))div_x B_k(u(t,x))}\ \text{ в } \mathcal{D}'(\Pi);$$

(iii) для любой выпуклой функции $\eta(u)\in C^2(\mathbb{R})$ (энтропии)

$$\eta(u)_t+\mathrm{div_x T_{\eta'}(\varphi)(u)-D_x^2\cdot T_{\eta'}(A)(u)+\eta''(u)\sum_{k=1}^{l}(div_x B_k(u))^2}\le 0\ \text{ в } \mathcal{D}'(\Pi); \tag{4}$$

(iv) $\operatorname*{ess\,lim}\limits_{t\to 0}|u(t,\cdot)-u_0|=0$ в $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$.

В случае законов сохранения $a(u) \equiv 0$ понятие э.р. сводится к известному понятию обобщенного энтропийного решения в смысле С.Н. Кружкова [2].

Если в (4) ограничиться неубывающими (невозрастающими) энтропиями $\eta(u)$, а в начальном условии (iv) заменить $|u(t,\cdot)-u_0|$ на $(u(t,\cdot)-u_0)^+$ ($(u(t,\cdot)-u_0)^-$), то получим понятия энтропийного субрешения (э.субр.) и энтропийного суперрешения (э.суперр.) задачи (1), (2). Нетрудно проверить, что э.р. задачи (1), (2) является э.субр. и э.суперр. этой задачи одновременно.

Основные результаты работы содержатся в следующих теоремах.

Теорема 1. *Пусть* $u_1 = u_1(t,x)$ *– э.субр., а* $u_2 = u_2(t,x)$ *– э.суперр. задачи* (1), (2)*. Тогда* $u_1(t,x) \le \operatorname{ess\,sup} u_0(x)$, $u_2(t,x) \ge \operatorname{ess\,inf} u_0(x)$ *п.в. на* Π *(принципы максимума/минимума).*

Теорема 2. *Максимум конечного множества э.субр. задачи* (1), (2) *также является э.субр. этой задачи. Соответственно, минимум конечного множества э.суперр. задачи* (1), (2) *является э.суперр. этой задачи.*

С помощью Теоремы 2 устанавливается следующий результат.

Теорема 3. *Существует наибольшее э.субр.* u_+ *и наименьшее э.суперр.* u_- *задачи* (1), (2)*. Эти функциями являются и э.р. этой задачи.*

Таким образом, u_+, u_- совпадают, соответственно, с наибольшим и наименьшим э.р. задачи (1), (2), существование которых установлено в [3]. Следует подчеркнуть, что в рассматриваемом общем случае, когда вектор потока лишь непрерывен, а матрица диффузии может вырождаться даже для э.р. свойство единственности может быть нарушено. Так что в общем случае $u_+ \neq u_-$.

В изотропном случае, когда матрица диффузии скалярна, Теоремы 1,2 вытекают из результатов [4,5].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда, грант № 22-21-00344.

Литература

1. Chen G.-Q., Perthame B. *Well-posedness for non-isotropic degenerate parabolic-hyperbolic equations* // Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire. 2003. Vol. 2. P. 645–668.

2. Кружков С. Н. *Квазилинейные уравнения первого порядка со многими независимыми переменными* // Математ. сборник. 1970. Т. 81. № 2. С. 228–255.

3. Panov E. Yu. *On some properties of entropy solutions of degenerate non-linear anisotropic parabolic equations* // J. Differential Equations. 2021. Vol. 275. P. 139–166.

4. Panov E. Yu. *To the theory of entropy sub-solutions of degenerate nonlinear parabolic equations* // Math. Meth. Appl. Sci. 2020. Vol. 4, No. 16. P. 9387–9404.

5. Панов Е. Ю. *К теории энтропийных решений нелинейных вырождающихся параболических уравнений* // Современная математика. Фундаментальные направления. 2020. Т. 66. № 2. С. 292–313.

КЛАССИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ПЕРВОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТИПА КЛЕЙНА-ГОРДОНА-ФОКА В ЦИЛИНДРЕ

И.И. Столярчук

Задача рассматривается на множестве четырёх независимых переменных $\boldsymbol{x} = (x_0, \boldsymbol{x}') = (x_0, x_1, x_2, x_3)$.

В области $Q = \{\boldsymbol{x} = (x_0, \boldsymbol{x}') : x_0 \in (0, +\infty), \boldsymbol{x}' \in \Omega\}$ где $\Omega = \{\boldsymbol{x}' : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < R^2\} \subset \mathbb{R}^3$ – трёхмерный шар в четырёхмерном пространстве, относительно неизвестной