В случае законов сохранения $a(u) \equiv 0$ понятие э.р. сводится к известному понятию обобщенного энтропийного решения в смысле С.Н. Кружкова [2].

Если в (4) ограничиться неубывающими (невозрастающими) энтропиями $\eta(u)$, а в начальном условии (iv) заменить $|u(t,\cdot)-u_0|$ на $(u(t,\cdot)-u_0)^+$ ($(u(t,\cdot)-u_0)^-$), то получим понятия энтропийного субрешения (э.субр.) и энтропийного суперрешения (э.суперр.) задачи (1), (2). Нетрудно проверить, что э.р. задачи (1), (2) является э.субр. и э.суперр. этой задачи одновременно.

Основные результаты работы содержатся в следующих теоремах.

Теорема 1. *Пусть* $u_1 = u_1(t,x)$ *– э.субр., а* $u_2 = u_2(t,x)$ *– э.суперр. задачи* (1), (2)*. Тогда* $u_1(t,x) \le \operatorname{ess\,sup} u_0(x)$, $u_2(t,x) \ge \operatorname{ess\,inf} u_0(x)$ *п.в. на* Π *(принципы максимума/минимума).*

Теорема 2. *Максимум конечного множества э.субр. задачи* (1), (2) *также является э.субр. этой задачи. Соответственно, минимум конечного множества э.суперр. задачи* (1), (2) *является э.суперр. этой задачи.*

С помощью Теоремы 2 устанавливается следующий результат.

Теорема 3. *Существует наибольшее э.субр.* u_+ *и наименьшее э.суперр.* u_- *задачи* (1), (2)*. Эти функциями являются и э.р. этой задачи.*

Таким образом, u_+, u_- совпадают, соответственно, с наибольшим и наименьшим э.р. задачи (1), (2), существование которых установлено в [3]. Следует подчеркнуть, что в рассматриваемом общем случае, когда вектор потока лишь непрерывен, а матрица диффузии может вырождаться даже для э.р. свойство единственности может быть нарушено. Так что в общем случае $u_+ \ne u_-$.

В изотропном случае, когда матрица диффузии скалярна, Теоремы 1,2 вытекают из результатов [4,5].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда, грант № 22-21-00344.

Литература

1. Chen G.-Q., Perthame B. *Well-posedness for non-isotropic degenerate parabolic-hyperbolic equations* // Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire. 2003. Vol. 2. P. 645–668.

2. Кружков С. Н. *Квазилинейные уравнения первого порядка со многими независимыми переменными* // Математ. сборник. 1970. Т. 81. № 2. С. 228–255.

3. Panov E. Yu. *On some properties of entropy solutions of degenerate non-linear anisotropic parabolic equations* // J. Differential Equations. 2021. Vol. 275. P. 139–166.

4. Panov E. Yu. *To the theory of entropy sub-solutions of degenerate nonlinear parabolic equations* // Math. Meth. Appl. Sci. 2020. Vol. 4, No. 16. P. 9387–9404.

5. Панов Е. Ю. *К теории энтропийных решений нелинейных вырождающихся параболических уравнений* // Современная математика. Фундаментальные направления. 2020. Т. 66. № 2. С. 292–313.

КЛАССИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ПЕРВОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТИПА КЛЕЙНА-ГОРДОНА-ФОКА В ЦИЛИНДРЕ

И.И. Столярчук

Задача рассматривается на множестве четырёх независимых переменных $\boldsymbol{x} = (x_0, \boldsymbol{x}') = (x_0, x_1, x_2, x_3)$.

В области $Q = \{\boldsymbol{x} = (x_0, \boldsymbol{x}') : x_0 \in (0, +\infty), \boldsymbol{x}' \in \Omega\}$ где $\Omega = \{\boldsymbol{x}' : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < R^2\} \subset \mathbb{R}^3$ – трёхмерный шар в четырёхмерном пространстве, относительно неизвестной функции $u : \mathbb{R}^4 \supset Q \to u(\boldsymbol{x}) \subset \mathbb{R}$ задаётся уравнение типа Клейна-Гордона-Фока с постоянным коэффициентом $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\partial^2_{x_0} u - a^2 \Delta_{\boldsymbol{x}'} u - \lambda u = 0, \tag{1}$$

где $\mathbb{R}$ – множество действительных чисел, $\Delta_{\boldsymbol{x}'} = \sum_{j=1}^{3} \partial^2/\partial {x_j}^2$ – оператор Лапласа. Отметим, что при $\lambda \equiv 0$ уравнение (1) сводится к волновому, которое рассмотрено в работе [1].

К уравнению (1) присоединяются условия Коши

$$u|_{x_0=0} = \varphi(\boldsymbol{x}'), \quad \partial_{x_0} u|_{x_0=0} = \psi(\boldsymbol{x}'), \tag{2}$$

где $\varphi : \mathbb{R}^3 \supset \Omega \to \varphi(\boldsymbol{x}') \subset \mathbb{R}$, $\psi : \mathbb{R}^3 \supset \Omega \to \psi(\boldsymbol{x}') \subset \mathbb{R}$ – заданные функции. На боковой поверхности $\Gamma = (0; +\infty) \times \partial\Omega$ задаётся граничное условие Дирихле

$$u|_{\Gamma} = \mu(\boldsymbol{x}), \tag{3}$$

где $\mu : \mathbb{R}^4 \supset \Gamma \to \mu(\boldsymbol{x}) \subset \mathbb{R}$ – заданная функция.

Применяя оператор осреднения $M_r u(\boldsymbol{x}) = r J_u(\boldsymbol{x}, r)$, где $J_u(\boldsymbol{x}, r) = \dfrac{1}{4\pi} \int_{|\boldsymbol{y}|=1} u(\boldsymbol{x} + r\boldsymbol{y})\, ds_{\boldsymbol{y}}$, получаем эквивалентную задачу для одномерного уравнения типа Клейна-Гордона-Фока

$$\partial^2_{x_0} M_r u(x_0, \boldsymbol{x}') - a^2 \partial^2_r M_r u(x_0, \boldsymbol{x}') - \lambda M_r u(x_0, \boldsymbol{x}') = 0, \tag{4}$$

с условиями

$$M_r u|_{x_0=0} = M_r \varphi(\boldsymbol{x}') = \overline{\varphi}(r), \quad M_r \partial_{x_0} u|_{x_0=0} = M_r \psi(\boldsymbol{x}') = \overline{\psi}(r) \tag{5}$$

и граничные условия

$$M_r u|_{r=r_N} = \overline{\mu}(x_0) = r_N \tilde{J}_{\mu}(x_0, \boldsymbol{x}', r_N), \quad M_r u|_{r\to 0} = 0. \tag{6}$$

Для задачи (4)–(6) в работе [2] доказана теорема о её разрешимости.

Теорема 1. *Классическое решение задачи (4)–(6) существует и единственно в классе* C^3 *тогда и только тогда, когда* $\overline{\varphi}(r) \in C^3([0, r_N])$, $\overline{\psi}(r) \in C^2([0, r_N])$, $\overline{\mu}(x_0) \in C^3([0, +\infty))$ *и выполняются условия согласования*

$$\overline{\varphi}(0) = 0, \quad \overline{\psi}(0) = 0, \quad d^2\overline{\varphi}(0) = 0, \quad d^2\overline{\psi}(0) = 0, \quad \overline{\varphi}(r_N) = \overline{\mu}(0), \quad \overline{\psi}(r_N) = d\overline{\mu}(0),$$

$$d^2\overline{\mu}(0) = a^2 d^2\overline{\varphi}(r_N) + \lambda\overline{\varphi}(r_N), \quad d^3\overline{\mu}(0) = a^2 d^2\overline{\psi}(l) + \lambda\overline{\psi}(r_N).$$

Для задачи (1)–(3) справедлива теорема о существовании единственного классического решения

Теорема 2. *Пусть* $\varphi(\boldsymbol{x}') \in C^3(\overline{\Omega})$, $\psi(\boldsymbol{x}') \in C^2(\overline{\Omega})$, $\mu(\boldsymbol{x}) \in C^3(\Gamma)$. *Классическое решение задачи (1)–(3) существует и единственно в классе* $C^2(\overline{Q})$ *тогда и только тогда, когда выполняются условия согласования*

$$\int\limits_{|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{y}'|=r_N} \varphi(\boldsymbol{y}')\, ds_{\boldsymbol{y}'} = \frac{r_N}{R} \int\limits_{\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{y}' \in S(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{y}', r_N)} \mu(0, \boldsymbol{y}')\, ds_{\boldsymbol{y}'}.$$

$$\int\limits_{|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{y}'|=r_N} \psi(\boldsymbol{y}')\, ds_{\boldsymbol{y}'} = \frac{r_N}{R} \int\limits_{\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{y}' \in S(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{y}', r_N)} \partial_{x_0}\mu(0, \boldsymbol{y}')\, ds_{\boldsymbol{y}'},$$

$$\lambda \int\limits_{|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{y}'|=r_N} \varphi(\boldsymbol{y}')\, ds_{\boldsymbol{y}'} + a^2 \int\limits_{|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{y}'|=r_N} \Delta\varphi(\boldsymbol{y}')\, ds_{\boldsymbol{y}'} = \frac{r_N}{R} \int\limits_{\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{y}'\in S(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{y}',r_N)} \partial_{x_0}^2 \mu(0,\boldsymbol{y}')\, ds_{\boldsymbol{y}'},$$

$$\lambda \int\limits_{|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{y}'|=r_N} \psi(\boldsymbol{y}')\, ds_{\boldsymbol{y}'} + a^2 \int\limits_{|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{y}'|=r_N} \Delta\psi(\boldsymbol{y}')\, ds_{\boldsymbol{y}'} = \frac{r_N}{R} \int\limits_{\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{y}'\in S(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{y}',r_N)} \partial_{x_0}^3 \mu(0,\boldsymbol{y}')\, ds_{\boldsymbol{y}'}.$$

Литература

1. Корзюк В. И., Столярчук И. И. *Классическое решение первой смешанной задачи для волнового уравнения в цилиндрической области* // Дифференциальные уравнения. 2022. Т. 58. № 10. С. 1353–1359.

2. Корзюк В. И., Столярчук И. И. *Произвольной гладкости классическое решение первой смешанной задачи для уравнения типа Клейна – Гордона – Фока* // Вес. Нац. акад. навук Беларусi. Сер. фiз.- мат. навук. 2022. Т. 58. № 1. С. 34–47.

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ ПРИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ПЕРВЫХ КОСЫХ ПРОИЗВОДНЫХ НА КОНЦАХ ОГРАНИЧЕННОЙ СТРУНЫ

Е.В. Устилко, Ф.Е. Ломовцев

Изучается характеристическая смешанная задача для волнового уравнения

$$u_{tt}(x,t) + (a_1 - a_2)u_{xt}(x,t) - a_1 a_2 u_{xx}(x,t) = f(x,t),\ (x,t) \in G = [0,d] \times [0,\infty), d > 0, \quad (1)$$

при начальных условиях

$$u(x,t)|_{t=0} = \varphi(x),\ u_t(x,t)|_{t=0} = \psi(x),\ x \in [0,d], \quad (2)$$

и нестационарных граничных условиях

$$[\alpha_1(t)(u_t(x,t) + a_1 u_x(x,t)) + \gamma_1(t) u(x,t)]|_{x=0} = \mu_1(t),$$

$$[\alpha_2(t)(u_t(x,t) + a_1 u_x(x,t)) + \gamma_2(t) u(x,t)]|_{x=d} = \mu_2(t),\ t > 0, \quad (3)$$

где коэффициенты граничных условий α_i, γ_i – m раз непрерывно дифференцируемые функции переменной t, $i = 1, 2$, исходные данные смешанной задачи f, φ, ψ, μ_1, μ_2 – заданные функции своих переменных x, t и постоянные коэффициенты уравнения $a_1 > 0$, $a_2 > 0$. Мы обозначаем частные производные соответствующих порядков от искомой функции u нижними индексами по указанным переменным, а символом $C^k(\Omega)$ – множество всех k раз непрерывно дифференцируемых функций на подмножестве плоскости $\Omega \subset R^2$, $R = (-\infty, +\infty)$.

Требуется найти в явном виде формулы классического решения $u \in C^2(G)$, вывести необходимые и достаточные требования гладкости на данные смешанной задачи φ, ψ, f, α_i, γ_i, μ_i, $i = 1, 2$, и установить условия согласования между начальными и граничными условиями и уравнением для однозначной и устойчивой везде разрешимости смешанной задачи (1)–(3).

Идея вывода формул классического решения и доказательства критерия корректности задачи (1)–(3) состоит в следующем. На первом этапе решаются и находятся критерии корректности вспомогательных смешанных задач для полуограниченной струны.