ОБ ОДНОМ РЕШЕНИИ БИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

В.А. Акимов

Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений в частных производных (ДУЧП), описывающих уравнение равновесия упругой изотропной среды [1]:

$$\nabla^2 u_i + k u_{j,ji} = 0, \qquad i,j = 1,2,3, \tag{1}$$

на которые дополнительно накладываются условия в частных производных [2]:

$$\partial_3 u + \partial_1 w = 0; \partial_3 \nu + \partial_2 w = 0; (k-1)\theta + 2\partial_3 w = 0; \theta = \partial_1 u + \partial_2 \nu + \partial_3 w \tag{2}$$

Здесь обозначено

$$\frac{\partial}{\partial x} = \partial_1,\ \frac{\partial}{\partial y} = \partial_2,\ \frac{\partial}{\partial y} = \partial_3;\ \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial_x^2} + \frac{\partial^2}{\partial_y^2} + \frac{\partial^2}{\partial_z^2} = \partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2 \text{ –оператор Лапласа;}$$

$k = \frac{\lambda+\mu}{\mu} = 1 + \frac{\lambda}{\mu} = \frac{1}{1-2\nu}$; λ, μ–коэффициенты Ламе; ν–коэффициент Пуассона; $u_1 = u$, $u_2 = \nu$, $u_3 = w$ – проекции перемещений упругой среды на координатные оси декартовой системы координат. Напомним, что индексы, отделенные запятой, означают взятие производных, а если индексы повторяются, то по ним производится суммирование. Решение исходной системы запишем в виде [1]:

$$\begin{aligned} u &= (k+1)\nabla^2\varphi_1 - k\partial_1(\partial_1\varphi_1 + \partial_2\varphi_2 + \partial_3\varphi_3), \\ v &= (k+1)\nabla^2\varphi_2 - k\partial_2(\partial_1\varphi_1 + \partial_2\varphi_2 + \partial_3\varphi_3), \\ w &= (k+1)\nabla^2\varphi_3 - k\partial_3(\partial_1\varphi_1 + \partial_2\varphi_2 + \partial_3\varphi_3), \end{aligned} \tag{3}$$

где функции $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ должны удовлетворять трехмерному бигармоническому уравнению

$$\nabla^2\nabla^2\varphi_i = 0, i = 1,2,3; \nabla^2\nabla^2 = \Delta^4 + 2\Delta^2\partial_3^2 + \partial_3^4; \Delta^2 = \partial_1^2 + \partial_2^2. \tag{4}$$

Разделим задачу на две.

Задача А. В этом случае перемещения u и ν описываются четными функциями относительно переменной z, а w–нечетной.

Задача Б. Здесь перемещения u и ν являются нечетными функциями относительно переменной z, а w–четной.

Разделим переменные:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= [C_{A1}\cos(z\Delta) + D_{A1}z\sin(z\Delta) + C_{B1}\sin(z\Delta) + D_{B1}z\cos(z\Delta)] * f(x,y), \\ \varphi_2 &= [C_{A2}\cos(z\Delta) + D_{A2}z\sin(z\Delta) + C_{B2}\sin(z\Delta) + D_{B2}z\cos(z\Delta)] * f(x,y), \\ \varphi_3 &= [A_{A3}\sin(z\Delta) + B_{A3}z\cos(z\Delta) + A_{B3}\cos(z\Delta) + B_{B3}z\sin(z\Delta)] * f(x,y), \end{aligned} \tag{5}$$

где $f(x,y)$–произвольная функция двух переменных. Стоящие в (4) коэффициенты A_{A3}, B_{A3}, A_{B3}, B_{B3}; C_{Ai}, C_{Bi}, D_{Ai}, D_{Bi}, $i = 1,2$ зависят от $\partial_1, \partial_2, \Delta = \sqrt{\partial_1^2 + \partial_2^2}$. Легко установить равенства:

$\nabla^2[\sin(z\Delta)] = \nabla^2[\cos(z\Delta)] = 0$; $\nabla^2[z\sin(z\Delta)] = 2\Delta\cos(z\Delta)$; $\nabla^2[z\cos(z\Delta)] = -2\Delta\sin(z\Delta)$.

Тогда можно записать:

Задача А.

$-2[(k+1)\Delta(D_{A1}\Delta + B_{A3}\partial_1) + k\partial_1(-C_{A1}\partial_1\Delta - C_{A2}\partial_2\Delta + \partial_1 D_{A1} + \partial_2 D_{A2} -$
$-A_{A3}\Delta^2 - 2B_{A3}\Delta)]\sin(z\Delta) - 2k\partial_1(D_{A1}\partial_1 + D_{A2}\partial_2 - B_{A3}\Delta)z\Delta\cos(z\Delta) = 0$
$-2[(k+1)\Delta(D_{A2}\Delta + B_{A3}\partial_2) + k\partial_2(-C_{A1}\partial_1\Delta - C_{A2}\partial_2\Delta + \partial_1 D_{A1} + \partial_2 D_{A2} -$
$-A_{A3}\Delta^2 - 2B_{A3}\Delta)]\sin(z\Delta) - 2k\partial_2(D_{A1}\partial_1 + D_{A2}\partial_2 - B_{A3}\Delta)z\Delta\cos(z\Delta) = 0$
$2(k-1)\Delta(D_{A1}\partial_1 + D_{A2}\partial_2 - B_{A3}\Delta)\cos(z\Delta) - 4(k+1)B_{A3}\Delta^2\cos(z\Delta)+$
$+2k\Delta[(C_{A1}\partial_1 + C_{A2}\partial_2 + A_{A3}\Delta + B_{A3}\Delta)\Delta - 2(D_{A1}\partial_1 + D_{A2}\partial_2 - B_{A3})]\cos(z\Delta)+$
$+4k\Delta^2(D_{A1}\partial_1 + D_{A2}\partial_2 - B_{A3}\Delta)z\sin(z\Delta) = 0\,;$

Задача Б.

$2(k+1)(-D_{B1}\Delta + B_{B3}\partial_1)\Delta\cos(z\Delta)-$
$-2k\partial_1(C_{B1}\partial_1\Delta + C_{B2}\partial_2\Delta - A_{B3}\Delta^2 + 2B_{B3}\Delta + D_{B1}\partial_1 + D_{B2}\partial_2)\cos(z\Delta)+$
$+2k\partial_1(D_{B1}\partial_1 + D_{B2}\partial_2 + B_{B3}\Delta)z\Delta\sin(z\Delta) = 0$
$2[(k+1)\Delta(-D_{B1}\Delta + B_{B3}\partial_2)-$
$-2k\partial_2(C_{B1}\partial_1\Delta + C_{B2}\partial_2\Delta - A_{B3}\Delta^2 + 2B_{B3}\Delta + D_1\partial_1 + D_2\partial_2)\cos(z\Delta)+$
$+2k\partial_2(D_{B1}\partial_1 + D_{B2}\partial_2 + B_{B3}\Delta)z\Delta\sin(z\Delta) = 0$
$-2(k-1)\Delta(D_{B1}\partial_1 + D_{B2}\partial_2 + B_{B3}\Delta)\sin(z\Delta) \quad -4(k+1)B_3\Delta^2\sin(z\Delta)+$
$+2k\Delta[(C_{B1}\partial_1 + C_{B2}\partial_2 - A_{B3}\Delta + B_{B3})\Delta + 2(D_1\partial_1 + D_2\partial_2 + B_3\Delta)]\sin(z\Delta)+$
$+4k\Delta^2(D_{B1}\partial_1 + D_{B2}\partial_2 + B_{B3}\Delta)z\cos(z\Delta) = 0.$

В результате были получены следующие решения:

$$C_2 = -\frac{\partial_1}{\partial_2}C_1;\, D_1 = \pm\frac{\partial_1}{\Delta}B_3;\, D_2 = \pm\frac{\partial_2}{\Delta}B_3;\, A_3 = \pm\frac{\varepsilon}{\Delta}B_3,\ \text{где}\varepsilon = 3-4\nu, \Delta = \sqrt{\partial_1^2 + \partial_2^2}. \quad (6)$$

Здесь знак плюс соответствует задаче А, а минус–задаче Б. Знак для коэффициентов C_1 и C_2 остается неизменным.

Полученным результатом можно воспользоваться в дальнейшем при решении конкретных граничных задач в частных производных.

Литература

1. Акимов В. А. *Операторный метод решения задач теории упругости.* Мн.: УП «Технопринт», 2003.

2. Акимов В. А. *Построение бигармонической функции, удовлетворяющей однородным граничным условиям. Математическое моделирование и дифференциальные уравнения. Материалы IV МНК, посвященной 95-летию со дня рождения Чл.-Корр. АН БССР Иванова Е.А.* Гродно,17–19 декабря 2019 г. С.41–42.

ОБОБЩЕННЫЙ МЕТОД ФУРЬЕ (ОМФ) В УРАВНЕНИИ БЕНДЖАМИНА – БОНА – МАХОНИ

И.Е. Андрушкевич

Уравнение Бенджамина – Бона – Махони (BBM-уравнение) имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} - u\frac{\partial u}{\partial x} - b\frac{\partial^3 u}{\partial t\,\partial x^2} = 0, \tag{1}$$

и используется для моделирования длинных волн в дисперсных средах. Количество известных его решений весьма ограничено [1].

Применим обобщенный метод Фурье [2] для построения его аналитических решений. Воспользуемся ОМФ-3, т.е. решение уравнения (1) будем искать в виде