ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ И СТОХАСТИЧЕСКИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ОБОБЩЕННЫЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ПРОСТРАНСТВАХ ЛЕБЕГА

А.И. Жук, Е.Н. Защук

Рассмотрим следующую систему на отрезке $T = [0, a] \subset \mathbb{R}$:

$$\dot{x}^i(t) = \sum_{j=1}^{q} f^{ij}(t, x(t))\dot{L}^j(t), i = \overline{1, p} \tag{1}$$

с начальным условием $x(0) = x_0$, где $f^{ij}, i = \overline{1, p}, j = \overline{1, q}$ - некоторые функции, $x(t) = [x^1(t), x^2(t), ..., x^p(t)]$, а $L^i(t), i = \overline{1, q}$ - функции ограниченной вариации на отрезке T. Без ограничения общности будем считать, что функции $L^j(t), j = \overline{1, q}$ непрерывны справа, $L^j(0) = L^j(0-) = 0$ и $L^j(a-) = L^j(a)$, $j = \overline{1, q}$.

Задаче (1) поставим в соответствие следующую конечно-разностную задачу с осреднением

$$x_n^i(t + h_n) - x_n^i(t) = \sum_{j=1}^{q} f_n^{ij}(t, x_n(t))[L_n^j(t + h_n) - L_n^j(t)], i = \overline{1, p} \tag{2}$$

с начальным условием $x_n(t)|_{[0,h_n)} = x_{n0}(t)$. Здесь $L_n^j(t) = (L^j * \rho_n)(t) = \int\limits_0^{\frac{1}{n}} L^j(t+s)\rho_n(s)\, ds$, где $\rho_n(t) = n\rho(nt)$, $\rho \geq 0$, $supp\rho \subseteq [0, 1]$, $\int\limits_0^1 \rho(s)\, ds = 1$, а $f_n = f * \widetilde{\rho}_n$, $\widetilde{\rho}_n(x_0, x_1, ..., x_p) = n^{p+1}\widetilde{\rho}(nx_0, nx_1, ..., nx_p)$, $\widetilde{\rho} \in C^\infty(\mathbb{R}^{p+1})$, $\widetilde{\rho} \geq 0$, $\int\limits_{[0,1]^{p+1}} \widetilde{\rho}(x_0, x_1, ..., x_p)\, dx_0 dx_1 ... dx_p = 1, supp\widetilde{\rho} \subset [0, 1]^{p+1}$.

Для описания предельного поведения решения задачи (2) рассмотрим систему

$$x^i(t) = x_0^i + \sum_{j=1}^{q} \int\limits_0^t f^{ij}(s, x(s))\, dL^{jc}(s) + \sum_{\mu_r \leq t} S^i(\mu_r, x(\mu_r-), \Delta L(\mu_r)), i = \overline{1, p} \tag{3}$$

где $L^{jc}(t)-$ непрерывная, а $L^{jd}(t)-$ разрывная составляющая функции $L^j(t)$, $\mu_r^j, r = 1, 2, ...-$ точки разрыва функции $L^j(t)$, $\Delta L(\mu_r) = L^{jd}(\mu_r+) - L^{jd}(\mu_r-)-$ величина скачка, $S^i(\mu, x, u) = \varphi^i(1, \mu, x, u) - \varphi^i(0, \mu, x, u)$, а $\varphi^i(t, \mu, x, u)$ находится из уравнения

$$\varphi^i(t, \mu, x, u) = x^i + \sum_{j=1}^{q} u^j \int\limits_0^t f^{ij}(\mu, \varphi(s, \mu, x, u))\, ds, i = \overline{1, p}, j = \overline{1, q},$$

$\mu \in T$, $x \in R^p$, $u \in R^q$.

Теорема. *Пусть* f^{ij} $i = \overline{1, p}, j = \overline{1, q}$ *удовлетворяют условию линейного роста и ограничены.* $L^j(t)$, $j = \overline{1, q}-$ *непрерывные справа функции ограниченной вариации.*

Тогда при $n \to \infty$, $h_n \to 0$ *так, что* $nh_n \to 0$, *решение* $x_n(t)$ *задачи Коши (2) сходится к решению системы уравнений (3) в пространстве* $L^p(T)$, *если* $|x_{n0}(\tau_t) - x_0| \to 0$ *в пространстве* $L^p(T)$.

Аналогичная теорема в случае поточечной сходимости была получена в [1].

Литература

1. Жук А. И., Яблонский О. Л., Спасков С. А. *Ассоциированные решения системы неавтономных дифференциальных уравнений с обобщенными коэффициентами. Смешанный случай* // Весці БДПУ. Сер. 3. Фізіка, матэматыка, інфарматыка, біялогія. геаграфія. 2019. №4. С. 16–22.

ВРЕМЯ ПЕРЕМЕШИВАНИЯ СЛУЧАЙНЫХ БЛУЖДАНИЙ НА ГРУППАХ КОМПЛЕКСНЫХ ОТРАЖЕНИЙ

А.О. Задорожнюк

Пусть S – не более чем счетное множество. Определим на нем вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, $\Omega = S$, $\mathcal{F}$ – σ-алгебра всех подмножеств Ω, $\mathbb{P}$ – вероятностная мера на $\mathcal{F}$.

Определение 1. Случайным блужданием (X_t), $t = 0, 1, 2, \dots$, на множестве S будем называть случайный процесс $X : \Omega \times \mathbb{N}_0 \to S$ на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, где $X_t(\omega) = \omega$.

Определение 2. Пусть μ и ν – вероятностные меры на конечном множестве S. Расстояние по вариации между этими мерами определяется по формуле

$$d(\mu, \nu) = \frac{1}{2} \sum_{i \in S} \mid \mu(i) - \nu(i) \mid .$$

Обозначим через π равномерное распределение на множестве S, через P^{X_t} – распределение вероятностей состояний случайного блуждания (X_t) на этом множестве в момент времени t.

Определение 3. Пусть $\varepsilon > 0$ – некоторая фиксированная величина. Временем перемешивания случайного блуждания (X_t) на S будем называть величину

$$\tau_{\text{mix}}(\varepsilon, (X_t), S) = \inf \left\{ t : d(P^{X_t}, \pi) \le \varepsilon \right\}.$$

Время перемешивания, таким образом, характеризует, как быстро распределение вероятностей состояний случайного блуждания приближается к равномерному. Для S_n с порождающим множеством, состоящим из транспозиций соседних элементов, Альдусом [1] были доказаны оценки $C_1 n^3 \le \tau_{\text{mix},(X_t),S_n} \le C_2 n^3 \log n$. Мы же рассматриваем естественное обобщение симметрической группы - группу комплексных отражений $G(m, 1, n)$.

$G(m, 1, n)$, $m > 1$, – конечная неприводимая группа отражений, действующая на n-мерном комплексном векторном пространстве. Ее элементы можно представить как мономиальные матрицы $n \times n$, элементами которых являются ξ^{a_k} ($\xi \in \mathbb{C}$ – первообразный корень из 1 степени m, $k = 1, \dots, n$. Операция на группе – умножение матриц соответствующих элементов. При $m = 1$ група совпадает с симметрической.

Матрицу, у которой элементы ξ^{a_k} стоят на позициях $(k, \sigma(k))$ ($\sigma \in S_n$), будем обозначать парой $(\sigma, (a_1, a_2, \dots, a_n))$. Также пусть (i, j) обозначает транспозицию из симметрической группы, меняющую i-ый и j-ый элементы местами, а id – единичный элемент симметрической группы. Выберем порождающее множество $T_{m,1,n}$ ($m > 1$), состоящее из следующих элементов: