Тогда при $n \to \infty$, $h_n \to 0$ так, что $nh_n \to 0$, решение $x_n(t)$ задачи Коши (2) сходится к решению системы уравнений (3) в пространстве $L^p(T)$, если $|x_{n0}(\tau_t) - x_0| \to 0$ в пространстве $L^p(T)$.

Аналогичная теорема в случае поточечной сходимости была получена в [1].

Литература

1. Жук А. И., Яблонский О. Л., Спасков С. А. *Ассоциированные решения системы неавтономных дифференциальных уравнений с обобщенными коэффициентами. Смешанный случай* // Весцi БДПУ. Сер. 3. Фiзiка, матэматыка, iнфарматыка, бiялогiя. геаграфiя. 2019. №4. С. 16–22.

ВРЕМЯ ПЕРЕМЕШИВАНИЯ СЛУЧАЙНЫХ БЛУЖДАНИЙ НА ГРУППАХ КОМПЛЕКСНЫХ ОТРАЖЕНИЙ

А.О. Задорожнюк

Пусть S – не более чем счетное множество. Определим на нем вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, $\Omega = S$, $\mathcal{F}$ – σ-алгебра всех подмножеств Ω, $\mathbb{P}$ – вероятностная мера на $\mathcal{F}$.

Определение 1. Случайным блужданием (X_t), $t = 0, 1, 2, \dots$, на множестве S будем называть случайный процесс $X : \Omega \times \mathbb{N}_0 \to S$ на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, где $X_t(\omega) = \omega$.

Определение 2. Пусть μ и ν – вероятностные меры на конечном множестве S. Расстояние по вариации между этими мерами определяется по формуле

$$d(\mu, \nu) = \frac{1}{2} \sum_{i \in S} \mid \mu(i) - \nu(i) \mid .$$

Обозначим через π равномерное распределение на множестве S, через P^{X_t} – распределение вероятностей состояний случайного блуждания (X_t) на этом множестве в момент времени t.

Определение 3. Пусть $\varepsilon > 0$ – некоторая фиксированная величина. Временем перемешивания случайного блуждания (X_t) на S будем называть величину

$$\tau_{\mathrm{mix}}(\varepsilon, (X_t), S) = \inf \left\{ t : d(P^{X_t}, \pi) \le \varepsilon \right\}.$$

Время перемешивания, таким образом, характеризует, как быстро распределение вероятностей состояний случайного блуждания приближается к равномерному. Для S_n с порождающим множеством, состоящим из транспозиций соседних элементов, Альдусом [1] были доказаны оценки $C_1 n^3 \le \tau_{\mathrm{mix},(X_t),S_n} \le C_2 n^3 \log n$. Мы же рассматриваем естественное обобщение симметрической группы - группу комплексных отражений $G(m,1,n)$.

$G(m,1,n)$, $m > 1$, – конечная неприводимая группа отражений, действующая на n-мерном комплексном векторном пространстве. Ее элементы можно представить как мономиальные матрицы $n \times n$, элементами которых являются ξ^{a_k} ($\xi \in \mathbb{C}$ – первообразный корень из 1 степени m, $k = 1, \dots, n$. Операция на группе – умножение матриц соответствующих элементов. При $m = 1$ група совпадает с симметрической.

Матрицу, у которой элементы ξ^{a_k} стоят на позициях $(k, \sigma(k))$ ($\sigma \in S_n$), будем обозначать парой $(\sigma, (a_1, a_2, \dots, a_n))$. Также пусть (i, j) обозначает транспозицию из симметрической группы, меняющую i-ый и j-ый элементы местами, а id – единичный элемент симметрической группы. Выберем порождающее множество $T_{m,1,n}$ ($m > 1$), состоящее из следующих элементов:

- $s_i = ((i, i+1), (0, \ldots, 0))$, $i = \overline{1, n-1}$;
- $r = (\mathrm{id}, (1, 0, \ldots, 0))$;
- $r^{-1} = (\mathrm{id}, (m-1, 0, \ldots, 0))$.

Рассматриваемое случайное блуждание начинается с конкретного (без потери общности, произвольного) элемента. Его начальное распределение вероятностей можно задать вектором длины $|G(m,1,n)| = m^n n!$, где на одной позиции стоит единица, а на остальных – нули. Матрица вероятностей одношаговых переходов определяется следующим образом:

$$\mathcal{M}_{kl} = \mathbb{P}(X_{t+1} = \omega_l | X_t = \omega_k) = \begin{cases} p_s/2, \text{ если } \omega_l = s_i\omega_k, \ i = \overline{1, n-1} \\ p_r/2, \ \textit{если } \omega_l = r\omega_k \ \textit{или } \omega_l = r^{-1}\omega_k \\ 1/2, \ \textit{если } \omega_l = \omega_k \\ 0, \ \textit{иначе} \end{cases} \tag{1}$$

где $(n-1)p_s + 2p_r = 1$. Легко убедиться, что, т.к. элементы s_i имеют порядок 2, матрица будет симметрической, и, следовательно, дважды стохастической. Тогда для вектора $v_\pi = \frac{1}{m^n n!}(1, 1, \ldots, 1)$ длины $m^n n!$ верно $v_\pi = v_\pi \mathcal{M}$, т.е. стационарное распределение такого случайного блуждания является равномерным.

Верны следующие оценки на время перемешивания.

Теорема 1. *Для любого m выполняется неравенство*

$$\tau_{\mathrm{mix}}(\varepsilon, (X_t), G(m,1,n)) \geq \frac{n^2}{4p_s}\left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right).$$

Теорема 2. *Для любого m при $n \geq 4/\varepsilon$ справедлива оценка:*

$$\tau_{\mathrm{mix}}(\varepsilon, (X_t), G(m,1,n)) \leq \lceil 2\log_2 n \rceil \left(\left\lceil \frac{m\,(m+4)}{4p_r} \right\rceil \left\lceil \frac{4(n-1)}{p_s} \right\rceil \lceil 2\log_2 n \rceil + \right.$$
$$\left. + \left\lceil \frac{2n(n-1)}{p_s} \right\rceil + \left\lceil \frac{n(n-1)}{p_s} \right\rceil \right)$$

Следствие. *Пусть $p_r = \frac{1}{4}$, $p_s = \frac{1}{2(n-1)}$. Для любого $m \in \mathbb{N}$ существуют постоянные $c(\varepsilon)$, $C(m)$ такие, что для любого $n \geq 4/\varepsilon$ выполняются неравенства*

$$c(\varepsilon) n^3 \leq \tau_{\mathrm{mix}}(\varepsilon, (X_t), G(m,1,n)) \leq C(m) n^3 \log n.$$

Литература

1. Aldous D. J. *Random Walks on Finite Groups and Rapidly Mixing Markov Chains* // Séminaire de Probabilités XVII. 1983. P. 243-297.