К ВОПРОСУ ОПЕРАТОРНОГО ИНТЕРПОЛИРОВАНИЯ И ЕГО ПОГРЕШНОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ НЕПРЕРЫВНО ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

М.В. Игнатенко

Пусть $C^1(D)$ — пространство функций, имеющих на $D=[a,b]$ непрерывную производную первого порядка, и $F(x)$ — оператор, отображающий $C^1(D)$ в некоторое другое функциональное пространство:

$$F(x) \equiv F(t;x),\ x=x(s)\in C^1(D),\ t\in R^N.$$

Операторный многочлен первой степени $\mathcal{P}_1(x)$ в рассматриваемом пространстве имеет вид

$$\mathcal{P}_1(x)=c(t)+c_1(t)x(a)+\int\limits_D q(t,s)x^{(1)}(s)ds, \tag{1}$$

где $c(t), c_1(t)$ и $q(t,s)$ — заданные функции. Многочлены (1) являются характерными линейными операторами в пространстве $C^1(D)$. Многочлены высших порядков строятся путем добавления к $\mathcal{P}_1(x)$ соответствующих однородных относительно $x(a)$ и $x^{(1)}(s)(s\in \in D)$ форм второй, третьей и т.д. степеней. В частности, операторный многочлен второй степени $\mathcal{P}_2(x)$ имеет вид

$$\mathcal{P}_2(x)=\mathcal{P}_1(x)+c_2(t)x^2(a)+$$
$$+x(a)\int\limits_D q_1(t,s)x'(s)ds+\int\limits_D\int\limits_D q_2(t,s_1,s_2)x'(s_1)x'(s_2)ds_1ds_2,$$

где $c_2(t)$, $q_1(t,s)$ и $q_2(t,s)$ — заданные функции.

Заметим, что задача интерполирования операторов в ее классической постановке решается неоднозначно. Формулы операторного интерполирования могут быть построены на основе аппарата разделенных разностей. Определения и свойства разделенных разностей произвольных порядков для операторов изложены, например, в [1].

Исследуем формулы разделенных разностей высших порядков в пространстве функций с непрерывной первой производной, рассмотренные ранее в работе [2]. Введем обозначения

$$\sigma_k(s,x_0,x_1)\equiv\sigma_k(x_0,x_1),$$
$$\sigma_k(x_0,x_1)=\sigma_{k-1}(x_0,x_1)+\frac{(s-a)^k}{k!}[x_1^{(k)}(a)-x_0^{(k)}(a)]\ \ (k=0,1,...,p-1),$$
$$\sigma_{-1}(x_0,x_1)=x_0(s), \tilde{h}_1(s)=h_1(s)-\sum_{\nu=0}^{p-1}\frac{(s-a)^\nu}{\nu!}h_1^{(\nu)}(a);\ \ x_0,x_1,h_1\in C^1(D).$$

Пусть далее

$$\omega_{nk}(x)=(x-x_k(a))(x-x_{k+1}(a))...(x-x_n(a)),\ k=1,2,...,n;$$

$$\sigma_{ki}(s)=x_i(s)+x_k(a)-x_i(a);\ k,i=0,1,...,n;$$

$$\phi_{kj}(s,\tau_1,...,\tau_j)=\phi_{k,j-1}(s,\tau_1,...,\tau_{j-1})+\frac{x_j(s)-\sigma_{j,j-1}(s)}{(b-a)^j}\prod_{l=1}^{j}(\tau_l-a),$$

$$k, j = 0, 1, ..., n;\ \phi_{k0}(s) = \sigma_{k0}(s),\ \tilde{h}_i(s) = h_i(s) - h_i(a),\ i = 1, 2, ..., n.$$

Формула

$$F[x_0, x_1, x_2, ..., x_n]h_n h_{n-1}...h_1 =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{F[\sigma_{k0}(\cdot)]}{\omega'_{n0}(x_k(a))} h_n(a)h_{n-1}(a)...h_1(a) + \sum_{\nu=1}^{n}\sum_{k=\nu}^{n}(b-a)^{\frac{-\nu(\nu+1)}{2}} \frac{h_n(a)...h_{\nu+1}(a)}{\omega'_{n\nu}(x_k(a))} \times$$

$$\times \int\limits_{D^\nu} \prod_{i=1}^{\nu-1}(\tau_i - a)^{\nu-i}\delta^\nu F[\phi_{k\nu}(\cdot, \tau_1, ..., \tau_\nu); \tilde{h}_\nu(\cdot), ..., \tilde{h}_1(\cdot)]d\tau_1...d\tau_\nu \qquad (2)$$

определяет [2] разделенную разность порядка $n \geq 1$ относительно узлов x_0, x_1, x_2, $\ldots$, x_n для оператора $F(x)$ на $C^1(D)$.

Интерполяционная формула Ньютона

$$L_n(x) = F(x_0) + \sum_{k=1}^{n} F[x_0, x_1, \ldots, x_k](x - x_{k-1})\ldots(x - x_1)(x - x_0),$$

когда операторы разделенных разностей $F[x_0, x_1, ..., x_k]\ h_k...h_2h_1$ $(k = 1, 2, ..., n)$ определяются формулой (2), принимает вид

$$L_n(x) = \sum_{\nu=0}^{n}\sum_{k=\nu}^{n} \frac{\omega_{n\nu}[x(a)]}{\omega'_{n\nu}[x_k(a)](x(a) - x_k(a))} I_{k\nu}(F; x), \qquad (3)$$

где

$$I_{k0}(F; x) = F[\sigma_{k0}(\cdot)],$$

$$I_{k\nu}(F; x) = (b-a)^{-\frac{\nu(\nu+1)}{2}} \int\limits_{D^\nu} \prod_{j=1}^{\nu-1}(\tau_j - a)^{\nu-j}\delta^\nu F[\phi_{k\nu}(\cdot, \tau_1, ..., \tau_\nu); \tilde{h}_\nu(\cdot), ..., \tilde{h}_1(\cdot)]d\tau_1...d\tau_\nu,$$

$$\tilde{h}_\nu(s) = x(s) - x_{\nu-1}(s) - x(a) + x_{\nu-1}(a)\ \ (k = 0, 1, ..., n;\ \nu = 1, 2, ...n).$$

Интерполяционный многочлен $L_n(x)$ тождественно совпадает [2] с оператором $F(x)$, если $F(x)$ — произвольный в пространстве $C^1(D)$ операторный многочлен степени не выше n.

Получим формулу для представления погрешности интерполирования $r_n(x)$ многочленом $L_n(x)$ вида (3). Имеем

$$r_n(x) = F(x) - L_n(x) = F[x_0, x_1, ..., x_{n+1}](x - x_n)(x - x_{n-1})...(x - x_0) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{F[\sigma_{k0}(\cdot)]}{\omega'_{n0}(x_k(a))} h_{n+1}(a)h_n(a)...h_1(a) + \sum_{\nu=1}^{n+1}\sum_{k=\nu}^{n+1}(b-a)^{\frac{-\nu(\nu+1)}{2}} \frac{h_{n+1}(a)...h_{\nu+1}(a)}{\omega'_{n+1,\nu}(x_k(a))} \times$$

$$\times \int\limits_{D^\nu} \prod_{i=1}^{\nu-1}(\tau_i - a)^{\nu-i}\delta^\nu F[\phi_{k\nu}(\cdot, \tau_1, ..., \tau_\nu); \tilde{h}_\nu(\cdot), ..., \tilde{h}_1(\cdot)]d\tau_1...d\tau_\nu,$$

где $h_i(s) = x(s) - x_{i-1}(s)$, $\tilde{h}_i(s) = h_i(s) - h_i(a)$ $(i = 1, 2, ..., n+1)$, $x_{n+1} \equiv x$.

В заключение отметим, что достаточно полная теория интерполирования операторов, заданных на множествах функций и матриц, изложена в монографии [3].

Литература

1. Янович Л. А. *Приближенное вычисление континуальных интегралов по гауссовым мерам.* Минск: Наука и техника, 1976.

2. Янович Л. А., Игнатенко М. В. *Формулы операторного интерполирования в пространствах непрерывно дифференцируемых функций* // Тр. Ин-та математики Нац. акад. наук Беларуси. 1999. Т. 3. С. 89-–98.

3. Янович Л. А., Игнатенко М. В. *Интерполяционные методы аппроксимации операторов, заданных на функциональных пространствах и множествах матриц.* Минск: Беларус. навука, 2020.

ОБ ОДНОЙ СИСТЕМЕ ДВУХ НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА С ПАРАМЕТРАМИ

Е.И. Каландия

Рассмотрим нелинейное интегро-дифференциальное уравнение

$$\mu \int_a^t K(t,\, s,\, x(s))\, ds + \; x'(t) = f(t,\, x(t)), \tag{1}$$

где μ – вещественный параметр, $K(t,\, s,\, z)$ – функция трех переменных, называемая ядром интегро-дифференциального уравнения, и $f(t,\, z)$ – двух переменных, удовлетворяющих следующим условиям:

1) $K(t,\, s,\, z)$ определенна и непрерывна на множестве $[a,\, b] \times [a,\, b] \times \mathbb{R}$ ($b > a, \mathbb{R}-$ множество вещественных чисел) и удовлетворяющая условию Липшица по третьему аргументу, т.е. существует такое число $C_1 > 0$, что для всех $z_1,\, z_2 \in \mathbb{R}$ справедливо неравенство

$$|K(t,\, s,\, z_2) - K(t,\, s,\, z_1)| \le C_1 \,|\, z_2 - \, z_1|\,. \tag{2}$$

2) $f(t,\, z)$ определенна и непрерывна на множестве $[a,\, b] \times \mathbb{R}$ и удовлетворяющая условию Липшица по второму аргументу, т.е. существует такое число $C_2 > 0$, что для всех $z_1,\, z_2 \in \mathbb{R}$ справедливо неравенство

$$|f(t,\, z_2) - f(t,\, z_1)| \le C_2 \,|\, z_2 - \, z_1|\,. \tag{3}$$

Для уравнения (1) поставим задачу Коши, задав начальное условие

$$x(a) = \, x^0. \tag{4}$$

Доказано [1], что при выполнении условий 1) и 2) имеет место теорема о существовании и единственности решения задачи Коши для рассматриваемого нелинейного интегро-дифференциального уравнения, а также следствие из нее в линейном случае, когда ядро $K(t,\, s,\, x(s))$ может быть представлено в виде произведения $L(t,\, s)x(s)$, где функция $L(t,\, s)$ определенна и непрерывна на квадрате $[a,\, b] \times [a,\, b]$, и $f(t, x(t)) = \alpha(t)x(t) + g(t)$, где функция $\alpha(t)$ и $g(t)$ определены и непрерывны на отрезке $[a,\, b]$.