Литература

1. Янович Л. А. *Приближенное вычисление континуальных интегралов по гауссовым мерам.* Минск: Наука и техника, 1976.

2. Янович Л. А., Игнатенко М. В. *Формулы операторного интерполирования в пространствах непрерывно дифференцируемых функций* // Тр. Ин-та математики Нац. акад. наук Беларуси. 1999. Т. 3. С. 89-–98.

3. Янович Л. А., Игнатенко М. В. *Интерполяционные методы аппроксимации операторов, заданных на функциональных пространствах и множествах матриц.* Минск: Беларус. навука, 2020.

ОБ ОДНОЙ СИСТЕМЕ ДВУХ НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА С ПАРАМЕТРАМИ

Е.И. Каландия

Рассмотрим нелинейное интегро-дифференциальное уравнение

$$\mu \int_a^t K(t,\, s,\, x(s))\, ds + \; x'(t) = f(t,\, x(t)), \tag{1}$$

где μ – вещественный параметр, $K(t,\, s,\, z)$ – функция трех переменных, называемая ядром интегро-дифференциального уравнения, и $f(t,\, z)$ – двух переменных, удовлетворяющих следующим условиям:

1) $K(t,\, s,\, z)$ определенна и непрерывна на множестве $[a,\, b] \times [a,\, b] \times \mathbb{R}$ ($b > a$, $\mathbb{R}-$ множество вещественных чисел) и удовлетворяющая условию Липшица по третьему аргументу, т.е. существует такое число $C_1 > 0$, что для всех $z_1,\, z_2 \in \mathbb{R}$ справедливо неравенство

$$|K(t,\, s,\, z_2) - K(t,\, s,\, z_1)| \le C_1 \,|\, z_2 - \, z_1| \,. \tag{2}$$

2) $f(t,\, z)$ определенна и непрерывна на множестве $[a,\, b] \times \mathbb{R}$ и удовлетворяющая условию Липшица по второму аргументу, т.е. существует такое число $C_2 > 0$, что для всех $z_1,\, z_2 \in \mathbb{R}$ справедливо неравенство

$$|f(t,\, z_2) - f(t,\, z_1)| \le C_2 \,|\, z_2 - \, z_1| \,. \tag{3}$$

Для уравнения (1) поставим задачу Коши, задав начальное условие

$$x(a) = \, x^0. \tag{4}$$

Доказано [1], что при выполнении условий 1) и 2) имеет место теорема о существовании и единственности решения задачи Коши для рассматриваемого нелинейного интегро-дифференциального уравнения, а также следствие из нее в линейном случае, когда ядро $K(t,\, s,\, x(s))$ может быть представлено в виде произведения $L(t,\, s)x(s)$, где функция $L(t,\, s)$ определенна и непрерывна на квадрате $[a,\, b] \times [a,\, b]$, и $f(t, x(t)) = \alpha(t)x(t) + g(t)$, где функция $\alpha(t)$ и $g(t)$ определены и непрерывны на отрезке $[a,\, b]$.

Рассмотрим систему нелинейных интегро-дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \int\limits_a^t K_1(t,\, s,\, x(s), y(s))\, ds \,+\, x'(t) = f_1(t,\, x(t), y(t))\,, \\ \int\limits_a^t K_2(t,\, s,\, x(s), y(s))\, ds \,+\, y'(t) = f_2(t,\, x(t), y(t)), \end{cases}$$

где ядра $K_1(t,\, s,\, z_1, z_2)$, $K_2(t,\, s,\, z_1, z_2)$ и функции $f_1(t,\, z_1, z_2)$, $f_2(t,\, z_1, z_2)$ удовлетворяют следующим условиям:

3) $K_1(t,\, s,\, u, v)$ и $K_2(t,\, s,\, u, v)$ непрерывны на множестве $[a,\, b]^2 \times \mathbb{R}^2$ ($b > a$, $\mathbb{R}$ – множество вещественных чисел) и удовлетворяют условию Липшица по третьему и четвертому аргументу, т.е. существует такое число $C_1 > 0$, что для всех $u_1,\, u_2, v_1, v_2 \in \in \mathbb{R}$ справедливы неравенства

$$|K_1(t,\, s,\, u_2, v_2) - K_1(t,\, s,\, u_1, v_1)| \le C_1\left(|\, u_2 -\, u_1| + |v_2 - v_1|\right).$$
$$|K_2(t,\, s,\, u_2, v_2) - K_2(t,\, s,\, u_1, v_1)| \le C_1\left(|\, u_2 -\, u_1| + |v_2 - v_1|\right).$$

4) $f_1(t,\, u, v)$ и $f_2(t,\, u, v)$ непрерывны на множестве $[a,\, b] \times \mathbb{R}^2$ и удовлетворяющая условию Липшица по второму и третьему аргументу, т.е. существует такое число $C_2 > 0$, что для всех $u_1,\, u_2, v_1, v_2 \in \mathbb{R}$ справедливы неравенства

$$|f_1(t,\, u_2, v_2) - f_1(t,\, u_1, v_1)| \le C_2\left(|\, u_2 -\, u_1| + |v_2 - v_1|\right).$$
$$|f_2(t,\, u_2, v_2) - f_2(t,\, u_1, v_1)| \le C_2\left(|\, u_2 -\, u_1| + |v_2 - v_1|\right).$$

Для системы поставим задачу Коши, задав начальное условие

$$x(a) =\, x^0,\; y\,(a) = y^0.$$

В линейном случае, когда ядра $K_1(t,\, s,\, x(s)y(s)) = L_1(t,\, s)x(s)$, $K_2(t,\, s,\, x(s)y(s)) = L_2(t,\, s)y(s)$, где функции $L_1(t,\, s)$, $L_2(t,\, s)$ определены и непрерывны на квадрате $[a,\, b]^2 \times \mathbb{R}^2$, и $f_1(t, x(t)) = \alpha_{11}(t)x(t) + \beta_{12}y(t) + g_1(t)$, $f_2(t, x(t)) = = \alpha_{21}(t)x(t) + \beta_{22}y(t) + g_2(t)$, где функции $\alpha_{11}(t), \alpha_{21}(t), \beta_{21}(t)$, $\beta_{22}(t)$ и $g_1(t)$, $g_2(t)$ определены и непрерывны на отрезке $[a,\, b]$, получаем систему линейных интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра с параметрами

$$\begin{cases} \mu_1 \int\limits_a^t L_1(t,s)x(s)ds + x'(t) = \alpha_{11}(t)x(t) + \beta_{12}y(t) + g_1(t), \\ \mu_2 \int\limits_a^t L_2(t,s)y(s)ds + y'(t) = \alpha_{21}(t)x(t) + \beta_{22}y(t) + g_2(t), \end{cases} \tag{5}$$

Так как условия 3) и 4) для уравнения (5), очевидно, выполнены, то мы получаем следующую теорему существования и единственности:

Теорема. *Решение задачи Коши для системы интегро-дифференциальных уравнений (5), в которой функции* $L_1(t,\, s)$, $L_2(t,\, s)$ *непрерывны на квадрате* $[a,\, b]^2 \times \mathbb{R}^2$, *и функции* $\alpha_{11}(t), \alpha_{21}(t), \beta_{21}(t), \beta_{22}(t)$ *и* $g_1(t)$, $g_2(t)$ *определены и непрерывны на отрезке* $[a,\, b]$ *, существует и единственно.*

Литература

1. Вувуникян Ю. М., Каландия Е. И. *Теоремы существования и единственности для нелинейных интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра с параметром* // Веснік ГрДУ імя Янкі Купалы. Сер. 2, Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. Т. 13. № 1. С. 1–16.

НАЧАЛЬНО-КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ ТЕОРИИ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ И СТАТИСТИЧЕСКОГО РАВНОВЕСИЯ В ПЛОСКО-ПАРАЛЛЕЛЬНОМ СЛОЕ

А.В. Калинин, А.А. Тюхтина, А.А. Бусалов

Математические основы и вопросы численного решения линейных задач теории переноса излучения обсуждались в [1–4]. Учет взаимодействия излучения со средой в отсутствие локального термодинамического равновесия приводит к необходимости изучения нелинейных систем интегро-дифференциальных уравнений [4–8]. Основные аспекты этих нелинейных задач могут быть описаны системой интегро-дифференциальных уравнений переноса излучения и статистического равновесия [6, 7] Вопросы математической корректности и свойств решений этой системы в ограниченных областях были изучены в работах [9–12]. В работах [13, 14] рассматривалась краевая задача для нелинейной стационарной системы интегро-дифференциальных уравнений переноса излучения и статистического равновесия в плоско-параллельном слое.

В настоящей работе исследуется следующая система нелинейных интегро - дифференциальных уравнений теории переноса излучения и статистического равновесия в плоско-параллельном слое $x_1 \le x \le x_2$, соответствующая модели двухуровневого атома в рамках предположения о полном перераспределении излучения по частоте:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi(x,\nu,\mu,t)}{\partial t} + \mu\frac{\partial}{\partial x}\varphi(x,\nu,\mu,t) +$$

$$+h\nu_{12}\frac{\kappa(\nu)}{2}\left(B_{12}C_1(x,t) - B_{21}C_2(x,t)\right)\varphi(x,\nu,\mu,t) = h\nu_{12}\frac{\kappa(\nu)}{2}A_{21}C_2(x,t), \tag{1}$$

$$\left(C_{12}n_e(x) + B_{12}\int\limits_I\int\limits_{-1}^{1}\frac{\kappa(\nu)}{2}\varphi(x,\nu,\mu,t)d\nu d\mu\right)C_1(x,t) =$$

$$= C_2(x,t)\left(A_{21} + C_{21}n_e(x) + B_{21}\int\limits_I\int\limits_{-1}^{1}\frac{\kappa(\nu)}{2}\varphi(x,\nu,\mu,t)d\nu d\mu\right), \tag{2}$$

$$C_1(x,t) + C_2(x,t) = f(x). \tag{3}$$

Здесь $x \in (x_1,\ x_2)$, $x_2 - x_1 = d > 0$, $\mu \in [-1,\ 1]$, $\nu \in I = [0,\ \nu_0]$, $t \in [0,T]$, $T > 0$.

Функция φ – удельная интенсивность излучения, C_1 и C_2 – пространственные плотности атомов среды, находящихся в основном и в возбужденном состоянии соответственно.

Система (1)–(3) дополняется граничными условиями

$$\varphi(x_1,\nu,\mu,t) = 0,\ \mu > 0,\ \varphi(x_2,\nu,\mu,t) = 0,\ \mu < 0,\ \nu \in I,\ t \in [0,T], \tag{4}$$