Литература

1. Вувуникян Ю. М., Каландия Е. И. *Теоремы существования и единственности для нелинейных интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра с параметром* // Веснік ГрДУ імя Янкі Купалы. Сер. 2, Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. Т. 13. № 1. С. 1–16.

НАЧАЛЬНО-КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ ТЕОРИИ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ И СТАТИСТИЧЕСКОГО РАВНОВЕСИЯ В ПЛОСКО-ПАРАЛЛЕЛЬНОМ СЛОЕ

А.В. Калинин, А.А. Тюхтина, А.А. Бусалов

Математические основы и вопросы численного решения линейных задач теории переноса излучения обсуждались в [1–4]. Учет взаимодействия излучения со средой в отсутствие локального термодинамического равновесия приводит к необходимости изучения нелинейных систем интегро-дифференциальных уравнений [4–8]. Основные аспекты этих нелинейных задач могут быть описаны системой интегро-дифференциальных уравнений переноса излучения и статистического равновесия [6, 7] Вопросы математической корректности и свойств решений этой системы в ограниченных областях были изучены в работах [9–12]. В работах [13, 14] рассматривалась краевая задача для нелинейной стационарной системы интегро-дифференциальных уравнений переноса излучения и статистического равновесия в плоско-параллельном слое.

В настоящей работе исследуется следующая система нелинейных интегро - дифференциальных уравнений теории переноса излучения и статистического равновесия в плоско-параллельном слое $x_1 \leq x \leq x_2$, соответствующая модели двухуровневого атома в рамках предположения о полном перераспределении излучения по частоте:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi(x,\nu,\mu,t)}{\partial t}+\mu\frac{\partial}{\partial x}\varphi(x,\nu,\mu,t)+$$

$$+h\nu_{12}\frac{\kappa(\nu)}{2}\left(B_{12}C_1(x,t)-B_{21}C_2(x,t)\right)\varphi(x,\nu,\mu,t)=h\nu_{12}\frac{\kappa(\nu)}{2}A_{21}C_2(x,t), \tag{1}$$

$$\left(C_{12}n_e(x)+B_{12}\int\limits_I\int\limits_{-1}^{1}\frac{\kappa(\nu)}{2}\varphi(x,\nu,\mu,t)d\nu d\mu\right)C_1(x,t)=$$

$$=C_2(x,t)\left(A_{21}+C_{21}n_e(x)+B_{21}\int\limits_I\int\limits_{-1}^{1}\frac{\kappa(\nu)}{2}\varphi(x,\nu,\mu,t)d\nu d\mu\right), \tag{2}$$

$$C_1(x,t)+C_2(x,t)=f(x). \tag{3}$$

Здесь $x\in(x_1,\ x_2)$, $x_2-x_1=d>0$, $\mu\in[-1,\ 1]$, $\nu\in I=[0,\ \nu_0]$, $t\in[0,T]$, $T>0$.

Функция φ – удельная интенсивность излучения, C_1 и C_2 – пространственные плотности атомов среды, находящихся в основном и в возбужденном состоянии соответственно.

Система (1)–(3) дополняется граничными условиями

$$\varphi(x_1,\nu,\mu,t)=0,\ \mu>0,\ \varphi(x_2,\nu,\mu,t)=0,\ \mu<0,\ \nu\in I,\ t\in[0,T], \tag{4}$$

соответствующими отсутствию внешнего потока частиц, падающего на границу области, и начальным условием

$$\varphi(x,\nu,\mu,0) = \varphi_0(x,\nu,\mu). \tag{5}$$

Предполагается, что h, c, ν_{12}, ν_0, B_{12}, B_{21}, C_{12}, C_{21}, A_{21} – заданные положительные числа, удовлетворяющие условию $B_{12}C_{21} - B_{21}C_{12} > 0$; $n_e(x)$, $f(x)$, $x \in [x_1, x_2]$, $\kappa(\nu)$, $\nu \in I$ – заданные функции, измеримые и неотрицательные почти всюду в своих областях определения, удовлетворяющие условиям

$$\mathrm{esssup}_{\mathrm{x}\in(\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_2)}\mathrm{n_e}(\mathrm{x}) < \infty,\ \mathrm{esssup}_{\mathrm{x}\in(\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_2)}\mathrm{f}(\mathrm{x}) < \infty,\ \mathrm{esssup}_{\nu\in\mathrm{I}}\kappa(\nu) < \infty,\ \int\limits_{\mathrm{I}} \kappa(\nu)\mathrm{d}\nu = 1.$$

Определим характеристику $\{l_\mu\}$ дифференциального оператора $\partial/c\partial t + \mu\partial/\partial x$ системой уравнений

$$c\,dt = \frac{dx}{\mu} = \frac{d\mu}{0} = \frac{d\nu}{0}$$

и обозначим через $1/c\,(d/d\tau)_\mu$ оператор дифференцирования вдоль характеристики $\{l_\mu\}$:

$$\frac{1}{c}\left(\frac{d}{d\tau}\right)_\mu \psi(x,\nu,\mu,t) = \frac{1}{c}\left.\frac{d\psi(x + c\mu(\tau - t),\nu,\mu,\tau)}{d\tau}\right|_{\tau=t}.$$

Пусть $D = [x_1,x_2] \times I \times [-1,1]$. Для произвольного измеримого подмножества Π евклидова пространства обозначим через $K_\infty(\Pi)$ конус неотрицательных функций в $L_\infty(\Pi)$; $\mathcal{D}_\infty(D \times [0,T])$ – класс функций $\psi \in L_\infty(D \times [0,T])$, абсолютно непрерывных вдоль почти каждой характеристики $\{l_\mu\}$ в $D \times [0,T]$, удовлетворяющих граничным условиям (4), и таких, что $1/c(d/d\tau)_\mu\psi \in L_\infty(D \times [0,T])$, $\mathfrak{M}_T = \mathcal{D}_\infty(D \times [0,T]) \times \times L_\infty([x_1,x_2] \times [0,T]) \times L_\infty([x_1,x_2] \times [0,T]))$.

Предполагается, что начальная функция $\varphi_0(x,\nu,\mu)$ принадлежит классу $K_\infty(D)$.

Решением задачи (1)–(5) называется функция $\Phi = \{\varphi, C_1, C_2\} \in \mathfrak{M}_T$, удовлетворяющая системе (1)–(3) и начальным и краевым условиям (4), (5) почти всюду, дифференциальный оператор $\partial/c\partial t + \mu\partial/\partial x$ в (1) понимается как оператор $1/c\,(d/d\tau)_\mu$ дифференцирования вдоль характеристики $\{l_\mu\}$.

В работе доказывается существование и единственность неотрицательного решения поставленной задачи. Исследуются свойства решения, предлагается и обосновывается итерационный линеаризующей алгоритм его поиска. Обсуждаются вопросы численной реализации предложенного алгоритма.

Литература

1. Владимиров В. С. *Математические задачи односкоростной теории переноса частиц* // Труды МИАН СССР. 1961. Вып. 61. С. 2–158.

2. Гермогенова Т. А. *Локальные свойства решений уравнения переноса.* М.: Наука, 1966.

3. Марчук Г. И., Лебедев В. И. *Численные методы в теории переноса нейтронов.* М.: Атомиздат, 1981.

4. Басс Л. П., Волощенко А. М., Гермогенова Т. А. *Методы дискретных ординат в задачах переноса излучения.* М: ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, 1986.

5. Гольдин В. Я. *Квазидиффузионный метод решения кинетического уравнения* // Журнал вычисл. математики и матем.физики. 1964. № 4. С. 1078–1087.

6. Иванов В. В. *Перенос лучистой энергии в атмосферах звезд и планет.* М.: Гостехтеоритздат, 1956.

7. Михалас Д. *Звездные атмосферы.* М.: Мир, 1982.

8. Четверушкин Б. Н. *Математическое моделирование задач динамики излучающего газа.* М., Наука, 1985.

9. Калинин А. В., Морозов С. Ф. *Об одной нелинейной краевой задаче теории переноса излучения* // Ж. выч. мат. и мат. физ. 1990. Т. 30. С. 1071–1080.

10. Калинин А. В., Морозов С. Ф. *О разрешимости "в целом"нелинейной задачи переноса излучения* // Дифференциальные уравнения. 1985. Т. 21. № 3. С. 482–494.

11. Калинин А. В., Морозов С. Ф. *Смешанная задача для нестационарной системы нелинейных интегродифференциальных уравнений* // Сиб. мат. журнал. 1999. Т. 40. № 5. С. 1052–1066.

12. Калинин А. В., Тюхтина А. А. *О нелинейной задаче для системы интегродифференциальных уравнений теории переноса излучения* // Ж. выч. мат. и мат. физ. 2022. Т. 62. № 6. С. 95–106.

13. Калинин А. В., Козлов А. Ю. *Об одной нелинейной краевой задаче теории переноса излучения в плоско-параллельном слое* // Вестник ННГУ. 2011. Т. 4. № 1. С. 140–145.

14. Kalinin A. V., Tyukhtina A. A., Busalov A. A. *An iterative method for solving a nonlinear system of the theory of radiation transfer and statistical equilibrium in a plane-parallel layer* // Mathematical Modeling and Supercomputer Technologies 22nd International Conference, MMST 2022, Nizhny Novgorod, Russia, November 14-17, 2022, Revised Selected Papers. Springer, CCIS 1750, 2022. P. 106–120.

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ И ОЦЕНКИ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ ВО ВНЕШНИХ ОБЛАСТЯХ

А.В. Калинин, А.А. Тюхтина, В.Е. Метелева

Различные представления функций используются в теории вложения пространств дифференцируемых функций, основы которой были заложены в работах С.Л. Соболева [1, 2]. Существенное развитие эта теория получила в работах С.М. Никольского, В.П. Ильина, О.В. Бесова [3], Ю.Г. Решетняка [4, 5], В.И. Буренкова [6]. В частности, в работах [4, 5] рассматриваются интегральные представления для функций и вектор-функций через некоторые дифференциальные операторы, на основе которых доказываются оценки, известные в литературе под названием неравенств Корна [7].

При исследовании задач гидродинамики и электромагнитной теории важную роль играют оценки векторных полей $\vec{u}$, связывающие их L_p-нормы с L_p-нормами $\mathrm{div}\tilde{\mathrm{u}}$ и $\mathrm{rot}\tilde{\mathrm{u}}$ [8–10]. При изучении электромагнитных полей в неоднородных средах с разрывными коэффициентами, характеризующими свойства среды, непосредственное использование этих результатов невозможно, и для решения этих вопросов в работах [11, 12] на основании специальных представлений векторных функций в звёздных областях были получены соответствующие оценки для скалярных произведений векторных полей. С использованием этих оценок были исследованы вопросы корректности различных постановок краевых и начально-краевых задач для системы уравнений Максвелла в неоднородных средах.

В настоящей работе рассматриваются представления векторных полей во внешних областях [13], которые позволяют расширить применимость оценок скалярных произведений векторных полей для задач электромагнитной теории в областях с более сложной геометрией.

Рассматриваемые представления имеют следующий вид. Пусть $\Omega_{int} \subset R^3$ – открытое множество, звездное относительно начала координат $\vec{0} \in \Omega_{int}$ с границей Γ класса C^1, $\Omega_{ext} = R^3 \setminus \bar{\Omega}_{int}$. Пусть $S = \{\vec{s} \in R^3 : |\vec{s}| = 1\}$, $l_s = \{\vec{x} = r\vec{s}, r \in (0, +\infty)\}$ – луч, проходящий через точку $\vec{s} \in S$. Через S_Γ обозначается множество $S_\Gamma = \{\vec{s} \in S : l_s \cap \cap \Gamma \neq \emptyset\}$.

Предполагается, что выполнены следующие условия:

1) Множество S_Γ открыто в S;