9. Калинин А. В., Морозов С. Ф. *Об одной нелинейной краевой задаче теории переноса излучения* // Ж. выч. мат. и мат. физ. 1990. Т. 30. С. 1071–1080.

10. Калинин А. В., Морозов С. Ф. *О разрешимости "в целом"нелинейной задачи переноса излучения* // Дифференциальные уравнения. 1985. Т. 21. № 3. С. 482–494.

11. Калинин А. В., Морозов С. Ф. *Смешанная задача для нестационарной системы нелинейных интегродифференциальных уравнений* // Сиб. мат. журнал. 1999. Т. 40. № 5. С. 1052–1066.

12. Калинин А. В., Тюхтина А. А. *О нелинейной задаче для системы интегродифференциальных уравнений теории переноса излучения* // Ж. выч. мат. и мат. физ. 2022. Т. 62. № 6. С. 95–106.

13. Калинин А. В., Козлов А. Ю. *Об одной нелинейной краевой задаче теории переноса излучения в плоско-параллельном слое* // Вестник ННГУ. 2011. Т. 4. № 1. С. 140–145.

14. Kalinin A. V., Tyukhtina A. A., Busalov A. A. *An iterative method for solving a nonlinear system of the theory of radiation transfer and statistical equilibrium in a plane-parallel layer* // Mathematical Modeling and Supercomputer Technologies 22nd International Conference, MMST 2022, Nizhny Novgorod, Russia, November 14-17, 2022, Revised Selected Papers. Springer, CCIS 1750, 2022. P. 106–120.

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ И ОЦЕНКИ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ ВО ВНЕШНИХ ОБЛАСТЯХ

А.В. Калинин, А.А. Тюхтина, В.Е. Метелева

Различные представления функций используются в теории вложения пространств дифференцируемых функций, основы которой были заложены в работах С.Л. Соболева [1, 2]. Существенное развитие эта теория получила в работах С.М. Никольского, В.П. Ильина, О.В. Бесова [3], Ю.Г. Решетняка [4, 5], В.И. Буренкова [6]. В частности, в работах [4, 5] рассматриваются интегральные представления для функций и вектор-функций через некоторые дифференциальные операторы, на основе которых доказываются оценки, известные в литературе под названием неравенств Корна [7].

При исследовании задач гидродинамики и электромагнитной теории важную роль играют оценки векторных полей $\vec{u}$, связывающие их L_p-нормы с L_p-нормами $\mathrm{div}\tilde{\mathrm{u}}$ и $\mathrm{rot}\tilde{\mathrm{u}}$ [8–10]. При изучении электромагнитных полей в неоднородных средах с разрывными коэффициентами, характеризующими свойства среды, непосредственное использование этих результатов невозможно, и для решения этих вопросов в работах [11, 12] на основании специальных представлений векторных функций в звёздных областях были получены соответствующие оценки для скалярных произведений векторных полей. С использованием этих оценок были исследованы вопросы корректности различных постановок краевых и начально-краевых задач для системы уравнений Максвелла в неоднородных средах.

В настоящей работе рассматриваются представления векторных полей во внешних областях [13], которые позволяют расширить применимость оценок скалярных произведений векторных полей для задач электромагнитной теории в областях с более сложной геометрией.

Рассматриваемые представления имеют следующий вид. Пусть $\Omega_{int} \subset R^3$ – открытое множество, звездное относительно начала координат $\vec{0} \in \Omega_{int}$ с границей Γ класса C^1, $\Omega_{ext} = R^3 \setminus \bar{\Omega}_{int}$. Пусть $S = \{\vec{s} \in R^3 : |\vec{s}| = 1\}$, $l_s = \{\vec{x} = r\vec{s}, r \in (0, +\infty)\}$ – луч, проходящий через точку $\vec{s} \in S$. Через S_Γ обозначается множество $S_\Gamma = \{\vec{s} \in S : l_s \cap \cap \Gamma \neq \emptyset\}$.

Предполагается, что выполнены следующие условия:

1) Множество S_Γ открыто в S;

2) для каждого $\vec{s} \in S_\Gamma$ множество $l_s \cap \Gamma$ состоит ровно из одной точки $\vec{x} = R(\vec{s})\vec{s}$, при этом $r\vec{s} \in \Omega_{int}$, если $0 < r < R(\vec{s})$ и $r\vec{s} \in \Omega_{ext}$, если $r > R(\vec{s})$;

3) функция $h(\vec{x}) = R(\vec{x}/|\vec{x}|)$, определенная на множестве $O_\Gamma = \{r\vec{s} : (r, \vec{s}) \in (0, \infty) \times \times S_\Gamma\}$, является функцией класса $C^1(O_\Gamma)$.

Для каждой точки $\vec{x} \in \Gamma$ обозначим через $\vec{n}(\vec{x})$ единичный вектор внешней по отношению к Ω_{int} нормали; для вектор-функции $\vec{u} \in \{C(\bar{\Omega}_{ext})\}^3$ использованы обозначения:

$$u_n(\vec{x}) = (\vec{u}(\vec{x}) \cdot \vec{n}(\vec{x})),\ \vec{u}_\tau(\vec{x}) = \vec{u}(\vec{x}) - u_n(\vec{x})\vec{n}(\vec{x}),\ \vec{x} \in \Gamma.$$

Теорема *Пусть граница* Γ *множества* $\Omega_{int} \subset R^3$ *удовлетворяет сформулированным выше условиям 1)-3). Тогда для любой функции* $\vec{u} \in \{C^1(\bar{\Omega}_{ext})\}^3$ *при всех* $\vec{x} \in \Omega_{ext}$ *справедливы равенства*

$$\vec{u}(\vec{x}) = \mathrm{rot} \int\limits_{\mathrm{h}(\tilde{\mathrm{x}})/|\tilde{\mathrm{x}}|}^{1} \tau[\tilde{\mathrm{u}}(\tau\tilde{\mathrm{x}}) \times \tilde{\mathrm{x}}]\mathrm{d}\tau + \int\limits_{\mathrm{h}(\tilde{\mathrm{x}})/|\tilde{\mathrm{x}}|}^{1} \tau^2\tilde{\mathrm{x}}\mathrm{div}\tilde{\mathrm{u}}(\tau\tilde{\mathrm{x}})\mathrm{d}\tau +$$
$$+\vec{x}\left(\mathrm{grad}\frac{\mathrm{h}(\tilde{\mathrm{x}})}{|\tilde{\mathrm{x}}|} \cdot \tilde{\mathrm{n}}(\frac{\tilde{\mathrm{x}}\mathrm{h}(\tilde{\mathrm{x}})}{|\tilde{\mathrm{x}}|})\right) u_n(\frac{\vec{x}h(\vec{x})}{|\vec{x}|})\frac{h(\vec{x})}{|\vec{x}|},$$

$$\vec{u}(\vec{x}) = \mathrm{grad} \int\limits_{\mathrm{h}(\tilde{\mathrm{x}})/|\tilde{\mathrm{x}}|}^{1} (\tilde{\mathrm{u}}(\tau\tilde{\mathrm{x}}) \cdot \tilde{\mathrm{x}})\mathrm{d}\tau + \int\limits_{\mathrm{h}(\tilde{\mathrm{x}})/|\tilde{\mathrm{x}}|}^{1} \tau[\mathrm{rot}\tilde{\mathrm{u}}(\tau\tilde{\mathrm{x}}) \times \tilde{\mathrm{x}}]\mathrm{d}\tau + \left[\tilde{\mathrm{x}} \times \left[\mathrm{grad}\frac{\mathrm{h}(\tilde{\mathrm{x}})}{|\tilde{\mathrm{x}}|} \times \tilde{\mathrm{u}}_\tau(\frac{\tilde{\mathrm{x}}\mathrm{h}(\tilde{\mathrm{x}})}{|\tilde{\mathrm{x}}|})\right]\right].$$

В работе обсуждаются вопросы применения данных представлений для получения оценок векторных полей в ограниченных и неограниченных областях и использование этих оценок для стационарных и квазистационарных задач электромагнитной теории в неоднородных средах.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-21-00440, https://rscf.ru/project/23-21-00440/

Литература

1. Соболев С. Л. *Об одной теореме функционального анализа* // Мат. сб. 1938. Т. 4. № 3. С. 471–497.

2. Соболев С. Л. *Некоторые применения функционального анализа в математической физике.* Л.: Изд-во ЛГУ, 1950.

3. Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М. *Интегральные представления функций и теоремы вложения.* М.: Наука, 1975.

4. Решетняк Ю. Г. *Некоторые интегральные представления дифференцируемых функций*// Сиб. мат. журн. 1971. Т. 12. № 2. С. 420–432.

5. Решетняк Ю. Г. *Интегральные представления дифференцируемых функций в областях с негладкой границей* // Сиб. мат. журн. 1980. Т. 21. № 6. С. 108–116.

6. Буренков В. И. *Интегральные представление С.Л. Соболева и формула Тейлора*// Труды МИАН СССР. 1973. Т. 131. С. 210–225.

7. Решетняк Ю. Г. *Об интегральных представлениях дифференцируемых функций* // Дифференциальные уравнения с частными производными. Новосибирск: Наука, 1980. С. 173–187.

8. Быховский Э. Б., Смирнов Н. В. *Об ортогональном разложении пространства вектор-функций, квадратично суммируемых по заданной области, и операторах векторного анализа* // Труды МИАН СССР. 1960. Т. 59. С. 5–36.

9. Вейль Г. *Метод ортогональной проекции в теории потенциала* // Математика. Теоретическая физика. М.: Наука, 1984.

10. Girault V., Raviart P. *Finite element methods for Navier-Stokes equations.* N.Y.: Springler-Verlag, 1986.

11. Калинин А.В., Калинкина А.А. Lp-оценки векторных полей // Изв. вузов. Сер. Математика. 2004. № 3. С. 26–35.

12. Kalinin A.V., Tyukhtina A.A. *Lp-estimates for scalar products of vector fields and their application to electromagnetic theory problems*// Mathematical Methods in the Applied Sciences. 2018. V. 41. № 18. P. 9283–9292.

13. Калинин А.В., Молодкина В.Е. *Некоторые представления векторных полей во внешних областях*// Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2014. № 3-1. С. 94–98.

ОДНО СООТНОШЕНИЕ КВАЗИНОРМ ВЫСШИХ ПРОИЗВОДНЫХ РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

В.Р. Мисюк

Пусть T, D_+ и D_- соответственно окружность $|z| = 1$, круг $|z| < 1$ и область $|z| > 1$ в комплексной плоскости. Для $0 < p \leqslant \infty$ через $L_p(D_+)$ обозначим пространство Лебега комплексных функций на D_+ относительно плоской меры Лебега с обычной квазинормой $\|f\|_{L_p(D_+)}$. Через $\mathcal{R}_n$, $n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$, обозначим множество рациональных функций степени не выше n с полюсами лишь в D_-. Известно, что для $r_n \in \mathcal{R}_n \bigcap L_\infty(D_+)$ имеет место оценка

$$\|r_n'\|_{L_2(D_+)} \leqslant \sqrt{\pi\ n}\ \|r_n\|_{L_\infty(D_+)},$$

полученная Е.П. Долженко из геометрических соображений. В настоящее время в теории рациональной аппроксимации известны различные его виды. Так, в частности, были получены его обобщения для пространств Лебега $L_p(D_+)$ относительно плоской меры, на высшие производные и на производные дробного порядка, приведены соотвествущие обратные теоремы [3],[4].

Для $\alpha \in \mathbb{R}$ и $0 < p \leqslant \infty,\ 0 < q \leqslant \infty$ через B_q^α обозначим пространство Харди—Бесова(см., например, [1],[2]). Именно, $f \in B_q^\alpha$, если при некотором $\beta > \alpha$ функция $(1-|z|^2)^{\beta-\alpha-\frac{1}{q}} \cdot \left(J^\beta f\right)(z)$ принадлежит $L_q\left(D_+\right)$, где $J^\beta f$ – производная функции f в смысле Вейля. Квазинорма (норма при $1 \leqslant q \leqslant \infty$) в пространстве B_q^α определяется следующим образом

$$\|f\|_{B_q^\alpha} = \left\|\left(1-|z|^2\right)^{\beta-\alpha-\frac{1}{q}} \cdot \left(J^\beta f\right)(z)\right\|_{L_q(D_+)} =$$

$$= \left(\int\limits_{D_+} \left|\left(1-|z|^2\right)^{\beta-\alpha-\frac{1}{q}} \cdot \left(J^\beta f\right)(z)\right|^q dm_2(z)\right)^{\frac{1}{q}} < \infty\ .$$

Хорошо известно, что определение пространства B_q^α не зависит от β: при различных β соответствующие квазинормы эквивалентны. Ради удобства, как правило, принимают $\beta = \alpha + 1$.

Теорема 1.[3] *Пусть* $r \in \mathcal{R}_n$, $\alpha > 0$, $p > 2$ *и* $1/q = \alpha + 2/p$. *Тогда*

$$\|r\|_{B_q^\alpha} \leqslant c(\alpha, p) n^{\alpha+1/p} \|r\|_{L_p(D_+)}\,,$$

где $c > 0$ *и зависит лишь от* α *и* p.

Полагаем далее,что рациональная функция r степени $n+m$ не имеет полюсов на T, причем n полюсов лежат в D_+ и m — в D_-. Тогда $r(z) = r_+(z) + r_-(1/z)$, где r_+