

$$\begin{aligned}
& -2[(k+1)\Delta(D_{A1}\Delta + B_{A3}\partial_1) + k\partial_1(-C_{A1}\partial_1\Delta - C_{A2}\partial_2\Delta + \partial_1 D_{A1} + \partial_2 D_{A2} - \\
& - A_{A3}\Delta^2 - 2B_{A3}\Delta)] \sin(z\Delta) - 2k\partial_1(D_{A1}\partial_1 + D_{A2}\partial_2 - B_{A3}\Delta)z\Delta \cos(z\Delta) = 0 \\
& -2[(k+1)\Delta(D_{A2}\Delta + B_{A3}\partial_2) + k\partial_2(-C_{A1}\partial_1\Delta - C_{A2}\partial_2\Delta + \partial_1 D_{A1} + \partial_2 D_{A2} - \\
& - A_{A3}\Delta^2 - 2B_{A3}\Delta)] \sin(z\Delta) - 2k\partial_2(D_{A1}\partial_1 + D_{A2}\partial_2 - B_{A3}\Delta)z\Delta \cos(z\Delta) = 0 \\
& 2(k-1)\Delta(D_{A1}\partial_1 + D_{A2}\partial_2 - B_{A3}\Delta) \cos(z\Delta) - 4(k+1)B_{A3}\Delta^2 \cos(z\Delta) + \\
& + 2k\Delta[(C_{A1}\partial_1 + C_{A2}\partial_2 + A_{A3}\Delta + B_{A3}\Delta)\Delta - 2(D_{A1}\partial_1 + D_{A2}\partial_2 - B_{A3})] \cos(z\Delta) + \\
& + 4k\Delta^2(D_{A1}\partial_1 + D_{A2}\partial_2 - B_{A3}\Delta)z \sin(z\Delta) = 0;
\end{aligned}$$

Задача Б.

$$\begin{aligned}
& 2(k+1)(-D_{B1}\Delta + B_{B3}\partial_1)\Delta \cos(z\Delta) - \\
& - 2k\partial_1(C_{B1}\partial_1\Delta + C_{B2}\partial_2\Delta - A_{B3}\Delta^2 + 2B_{B3}\Delta + D_{B1}\partial_1 + D_{B2}\partial_2) \cos(z\Delta) + \\
& + 2k\partial_1(D_{B1}\partial_1 + D_{B2}\partial_2 + B_{B3}\Delta)z\Delta \sin(z\Delta) = 0 \\
& 2[(k+1)\Delta(-D_{B1}\Delta + B_{B3}\partial_2) - \\
& - 2k\partial_2(C_{B1}\partial_1\Delta + C_{B2}\partial_2\Delta - A_{B3}\Delta^2 + 2B_{B3}\Delta + D_{B1}\partial_1 + D_{B2}\partial_2) \cos(z\Delta) + \\
& + 2k\partial_2(D_{B1}\partial_1 + D_{B2}\partial_2 + B_{B3}\Delta)z\Delta \sin(z\Delta) = 0 \\
& - 2(k-1)\Delta(D_{B1}\partial_1 + D_{B2}\partial_2 + B_{B3}\Delta) \sin(z\Delta) - 4(k+1)B_{B3}\Delta^2 \sin(z\Delta) + \\
& + 2k\Delta[(C_{B1}\partial_1 + C_{B2}\partial_2 - A_{B3}\Delta + B_{B3})\Delta + 2(D_{B1}\partial_1 + D_{B2}\partial_2 + B_{B3})] \sin(z\Delta) + \\
& + 4k\Delta^2(D_{B1}\partial_1 + D_{B2}\partial_2 + B_{B3}\Delta)z \cos(z\Delta) = 0.
\end{aligned}$$

В результате были получены следующие решения:

$$C_2 = -\frac{\partial_1}{\partial_2}C_1; D_1 = \pm \frac{\partial_1}{\Delta}B_3; D_2 = \pm \frac{\partial_2}{\Delta}B_3; A_3 = \pm \frac{\varepsilon}{\Delta}B_3, \text{ где } \varepsilon = 3 - 4\nu, \Delta = \sqrt{\partial_1^2 + \partial_2^2}. \quad (6)$$

Здесь знак плюс соответствует задаче А, а минус – задаче Б. Знак для коэффициентов C_1 и C_2 остается неизменным.

Полученным результатом можно воспользоваться в дальнейшем при решении конкретных граничных задач в частных производных.

Литература

1. Акимов В. А. *Операторный метод решения задач теории упругости*. Мн.: УП «Технопринт», 2003.
2. Акимов В. А. *Построение бигармонической функции, удовлетворяющей однородным граничным условиям. Математическое моделирование и дифференциальные уравнения. Материалы IV МНК, посвященной 95-летию со дня рождения Чл.-Корр. АН БССР Иванова Е.А.* Гродно, 17–19 декабря 2019 г. С.41–42.

ОБОБЩЕННЫЙ МЕТОД ФУРЬЕ (ОМФ) В УРАВНЕНИИ БЕНДЖАМИНА – БОНА – МАХОНИ

И.Е. Андрушкевич

Уравнение Бенджамина – Бона – Махони (БВМ-уравнение) имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} - u \frac{\partial u}{\partial x} - b \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} = 0, \quad (1)$$

и используется для моделирования длинных волн в дисперсных средах. Количество известных его решений весьма ограничено [1].

Применим обобщенный метод Фурье [2] для построения его аналитических решений. Воспользуемся ОМФ-3, т.е. решение уравнения (1) будем искать в виде

$$u(x, t) = \{\chi_1(x)\tau_1(t) + \chi_2(x)\tau_2(t) + a\}^{-1}, \quad (2)$$

где $\chi_1, \tau_1, \chi_2, \tau_2$ — неизвестные функции соответствующих переменных, a — $const$.

Подставляя (2) в (1), получаем следующее билинейное функциональное уравнение

$$\sum_{i=1}^{17} \psi_i(t) \varphi_i(x) = 0. \quad (3)$$

В уравнении (3) приняты следующие обозначения:

$$\psi_1 = \tau_1, \quad \varphi_1 = \chi_1' b; \quad \psi_2 = \tau_2, \quad \varphi_2 = \chi_2' b; \quad \psi_3 = \tau_1', \quad \varphi_3 = a\chi_1'' b^2 - \chi_1 b^2;$$

$$\psi_4 = \tau_2', \quad \varphi_4 = a\chi_2'' b^2 - \chi_2 b^2; \quad \psi_5 = \tau_1^2, \quad \varphi_5 = \chi_1' \chi_1;$$

$$\psi_6 = \tau_2^2, \quad \varphi_6 = \chi_2' \chi_2; \quad \psi_7 = \tau_1 \tau_2, \quad \varphi_7 = \chi_1' \chi_2 + \chi_2' \chi_1;$$

$$\psi_8 = \tau_1 \tau_1', \quad \varphi_8 = -2\chi_1^2 b - 4a(\chi_1')^2 b; \quad \psi_9 = \tau_2 \tau_2', \quad \varphi_9 = -2\chi_2^2 b - 4a(\chi_2')^2 b;$$

$$\psi_{10} = \tau_1^2 \tau_1', \quad \varphi_{10} = -\chi_1^3 - a\chi_1^2 \chi_1'' + 2a\chi_1(\chi_1')^2;$$

$$\psi_{11} = \tau_2^2 \tau_2', \quad \varphi_{11} = -\chi_2^3 - a\chi_2^2 \chi_2'' + 2a\chi_2(\chi_2')^2;$$

$$\psi_{12} = \tau_2^2 \tau_1', \quad \varphi_{12} = -4a\chi_1' \chi_2' \chi_2 + 6a\chi_1(\chi_2')^2 + a\chi_1'' \chi_2^2 - \chi_1 \chi_2^2 - 2a\chi_1 \chi_2'' \chi_2;$$

$$\psi_{13} = \tau_1^2 \tau_2', \quad \varphi_{13} = -4a\chi_2' \chi_1' \chi_1 + 6a\chi_2(\chi_1')^2 + a\chi_2'' \chi_1^2 - \chi_2 \chi_1^2 - 2a\chi_2 \chi_1'' \chi_1;$$

$$\psi_{14} = \tau_1 \tau_2', \quad \varphi_{14} = -4a\chi_2' \chi_1' b + 2a\chi_2'' \chi_1 b - 2\chi_2 \chi_1 b - 2a\chi_2 \chi_1'' b;$$

$$\psi_{15} = \tau_2 \tau_1', \quad \varphi_{15} = -4a\chi_1' \chi_2' b + 2a\chi_1'' \chi_2 b - 2\chi_1 \chi_2 b - 2a\chi_1 \chi_2'' b;$$

$$\psi_{16} = \tau_2 \tau_1 \tau_1', \quad \varphi_{16} = -2a\chi_1^2 \chi_2'' - 2\chi_1^2 \chi_2 + 8a\chi_1 \chi_1' \chi_2' - 4a(\chi_1')^2 \chi_2;$$

$$\psi_{17} = \tau_1 \tau_2 \tau_2', \quad \varphi_{17} = -2a\chi_2^2 \chi_1'' - 2\chi_2^2 \chi_1 + 8a\chi_2 \chi_2' \chi_1' - 4a(\chi_2')^2 \chi_1.$$

Используя алгоритм реализации ОМФ [3], находим, что функции

$$\chi_1(x) = c_1 \exp\left(\frac{x}{\sqrt{b}}\right), \quad \chi_2(x) = c_2 \exp\left(-\frac{x}{\sqrt{b}}\right), \quad \tau_1(t) = \exp\left(\frac{t}{12\sqrt{b}\sqrt{c_1 c_2}}\right),$$

$$\tau_2(t) = \exp\left(-\frac{t}{12\sqrt{b}\sqrt{c_1c_2}}\right), \quad a = 2\sqrt{c_1c_2}; \quad c_1, c_2 = \text{const},$$

являются одним из решений уравнения (3).

Окончательно соответствующее решение уравнения ВВМ (1) будет иметь вид

$$u(x, t) = \left\{ c_1 \exp\left(\frac{x}{\sqrt{b}} + \frac{t}{12\sqrt{b}\sqrt{c_1c_2}}\right) + c_2 \exp\left(-\frac{x}{\sqrt{b}} - \frac{t}{12\sqrt{b}\sqrt{c_1c_2}}\right) + 2\sqrt{c_1c_2} \right\}^{-1}. \quad (4)$$

Решение (4) впервые получено нами. Более того, ОМФ позволил нам построить как все уже известные аналитические решения уравнения (1), так и ряд принципиально новых.

Полученные результаты могут найти применение при исследовании нелинейных физических процессов.

Литература

1. Полянин А. Д., Зайцев В. Ф. *Справочник по нелинейным уравнениям математической физики*. М.: Издательская фирма "Физико-математическая литература" 2002.
2. Андрушкевич И. Е. *Методы разделения переменных в волновых уравнениях*. Новополюк: ПГУ, 2010.
3. Андрушкевич И. Е. *Метод построения аналитических решений нелинейных уравнений с частными производными и алгоритм решения уравнений третьего порядка специального вида* // Информатика. 2017. № 4. С. 5 – 19.

О ДИСКРЕТНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ В КВАДРАНТЕ

Е.Б. Афанасьева, В.Б. Васильев, О.Ю. Лукинова, А.А. Машинец

Для исследования разрешимости модельных эллиптических псевдодифференциальных уравнений была использована специальная факторизация эллиптического символа [1], при наличии которой удалось получить полную картину разрешимости. Исследование дискретных ситуаций было начато в работе [2] и продолжено в [3,4], где рассматривался случай полупространства. Здесь рассматривается дискретное уравнение в квадранте – простейшей канонической области с негладкой границей.

Пусть $\mathbb{Z}^2$ обозначает целочисленную решетку на плоскости. Обозначим $K = \{x \in \mathbb{R}^2 : x = (x_1, x_2), x_1 > 0, x_2 > 0\}$ первый квадрант, $K_d = h\mathbb{Z}^2 \cap K, h > 0$. Мы будем работать с функциями дискретной переменной $u_d(\tilde{x}), \tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \in h\mathbb{Z}^2$.

Обозначим $\mathbb{T}^2 = [-\pi, \pi]^2, \hbar = h^{-1}, \zeta^2 = h^{-2}((e^{-i\hbar\xi_1} - 1)^2 + (e^{-i\hbar\xi_2} - 1)^2), S(h\mathbb{Z}^2)$ – дискретный аналог пространства Шварца бесконечно дифференцируемых быстро убывающих на бесконечности функций..

Пространство $H^s(h\mathbb{Z}^2)$ состоит из дискретных обобщенных функций и является замыканием пространства $S(h\mathbb{Z}^2)$ в норме

$$\|u_d\|_s = \left(\int_{\mathbb{T}^2} (1 + |\zeta^2|)^s |\tilde{u}_d(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2},$$