и r_- — рациональные функции степени соответственно n и m с полюсами лишь в D_-. Из теоремы 1 немедленно получаем.

Теорема 2. *Пусть* $\alpha > 0$, $p > 2$ *и* $1/q = \alpha + 2/p$. *Тогда*

$$\|r_+\|_{B_q^\alpha} \leqslant c(\alpha,p) n^{\alpha+1/p} \|r\|_{L_p(D_+)},$$

$$\|r_-\|_{B_q^\alpha} \leqslant c(\alpha,p) m^{\alpha+1/p} \|r\|_{L_p(D_+)},$$

где $c > 0$ *и зависит лишь от* α *и* p.

Применяя стандартный метод Бернштейна, легко получить соответствующее приложение в виде обратных теорем, где техническим аппаратом для их решения служит приведенное здесь соотношения для производных рациональных функций.

Литература

1. Flett T. M., Flett T. M. *Lipschitz spaces of functions on the circle and the disk* // J. Math. Anal. and Appl., 1972. V. 39, № 1. P. 121–158.

2. Пекарский А. А. *Неравенства типа Бернштейна для производных рациональных функций и обратные теоремы рациональной аппроксимации* // Матем. сб., 1984. Т. 124 (166), № 4 (8). С. 571—588.

3. Мисюк В. Р. *Уточнение неравенств и теорем типа Бернштейна теории рациональных приближений относительно плоской меры Лебега* // Веснік ГрДУ імя Я.Купалы. Серия 2, 2008. № 2 (68). С. 22—31.

4. Мисюк В. Р. *Об обратной теореме теории рациональных приближений для пространств Бергмана* // Проблемы физики, математики и техники. 2010. №.1(2). С. 34–37.

О ПРИБЛИЖЕННОМ РЕШЕНИИ ДВУХТОЧЕЧНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ПОЛУЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА ВОЛЬТЕРРА

О.Д. Нуржанов

Рассматривается система интегро-дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + \int\limits_0^t B(t,s)x(s)ds + f\left(t, x, \int\limits_0^t \varphi(t,s,x(s))ds\right) \qquad (1)$$

при нелинейных граничных условиях

$$g(x(0)) = x(T), \qquad (2)$$

где x, f, φ, g – точки n-мерного евклидова пространства E_n; $A(t)$, $B(t,s)$ – матрицы с размерами $n \times n$.

Пусть $D \subset E_n$ – замкнутая ограниченная область, $D_1 : \|y\| \le T \cdot h_\varphi$ – шар пространства E_n, $h_\varphi = \max\limits_{(t,s)\in[0,T],\, x\in D} \|\varphi(t,s,x)\|$.

Предположим, что в области $(t,s,x,y) \in \Omega = [0,T] \times [0,T] \times D \times D_1$ выполняются следующие условия:

1) матрицы $A(t)$ и $B(t,s)$ определены и непрерывны в области $(t,s) \in [0,T] \times [0,T]$ и для них существует резольвентная матрица $R(t,s)$ ($R(t,t) = E$), которая является решением сопряженного уравнения

$$\frac{\partial R(t,s)}{\partial s} = -R(t,s)A(s) - \int\limits_s^t R(t,u)B(u,s)du;$$

2) вектор–функции $f(t,x,y)$, $\varphi(t,s,x)$, $g(u)$ определены и непрерывны в области Ω, а также для всех (t,x,y), (t,x',y'), (t,s,x), $(t,s,x')\in\Omega$ выполняются неравенства

$$|f\,(t,x,y)|\le M,$$

$$|f\,(t,x,y)-f\,(t,x',y')|\le K_1\,|x-x'|+K_2\,|y-y'|\,,$$
$$|\varphi(t,s,x)-\varphi\,(t,s,x')|\le K_3\,|x-x'|\,,$$

где $|f|=(|f_1|,\ldots,|f_n|)$, $M=(M_1,\ldots,M_n)$, $M_i>0$; $K_l=\{k_{ij}^l\ge 0,\, i,j=1,2,\ldots,n$, $l=1,2,3\}$;

3) множества точек $x_0\in D_\beta\subset D$ таких, что точки

$$x_0(t,x_0)=R(t,0)\left(1-\frac{t}{T}\right)x_0+\frac{t}{T}g\,(x_0)$$

содержатся в области D вместе со своей β–окрестностью, непусто: $D_\beta\ne\varnothing$, где

$$\beta=\left(\frac{T}{2}R_0+R_1\right)M,\quad R_0=\max_{0\le\tau\le t\le T}|R(t,\tau)|,$$

$$R_1=\max_{t\in[0,T]}\int\limits_0^t|R(T,\tau)-R(t,\tau)|d\tau;$$

4) наибольшее положительное собственное значение матрицы

$$Q=\left(\frac{T}{2}R_0+R_1\right)(K_1+TK_2K_3)$$

меньше единицы: $\lambda_{\max}(Q)<1$.

При этих условиях для исследования решений краевой задачи (1), (2) можно применить схему численно-аналитического метода А.М. Самойленко [1, 2]. Согласно этой схеме для построения приближенного решения исходной задачи (1), (2) используется рекуррентное соотношение

$$\begin{gathered}x_m\,(t,x_0)=R(t,0)x_0+\int\limits_0^t R(t,\tau)f\left(\tau,x_{m-1}\,(\tau,x_0)\,,\int\limits_0^\tau\varphi\,(\tau,s,x_{m-1}(s,x_0))\,ds\right)d\tau-\\ -\frac{t}{T}\int\limits_0^T R(T,\tau)f\left(\tau,x_{m-1}\,(\tau,x_0)\,,\int\limits_0^\tau\varphi\,(\tau,s,x_{m-1}\,(s,x_0))\,ds\right)d\tau+\qquad(3)\\ +\frac{t}{T}\left[g\,(x_0)+R\,(T,0)\,x_0\right],\quad m=1,2,3,\ldots,\\ x_0\,(t,x_0)=R(t,0)x_0+\frac{t}{T}\left[g\,(x_0)+R(T,0)x_0\right].\end{gathered}$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема. *Пусть для краевой задачи (1), (2) выполняются условия* $1)-4)$. *Тогда*

1) при всех $x_0\in D_\beta$ *последовательность функций вида (3), удовлетворяющих краевым условиям (2), равномерно сходится при* $m\to\infty$ *относительно области* $(t,x_0)\in\in[0,T]\times D_\beta$ *к предельной функции* $x^*\,(t,x_0)$, *которая удовлетворяет краевым условиям (2);*

2) предельная функция $x^*(t, x_0)$ является решением краевой задачи (1), (2) тогда и только тогда, когда, если точка $x_0 = x_0^*$ является решением определяющего уравнения:

$$\Delta(x_0) = \frac{1}{T}\left[g(x_0) + R(T,0)x_0\right] -$$

$$-\frac{1}{T}\int\limits_0^T R(T,\tau) f\left(\tau, x^*(\tau, x_0), \int\limits_0^\tau \varphi(\tau, s, x^*(s, x_0))\, ds\right) d\tau = 0.$$

При подстановке этого значения $x = x_0^*$ в (3), получим приближенное решение краевой задачи (1), (2).

Литература

1. Самойленко А.М., Ронто Н.И. *Численно-аналитические методы в теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений.* Киев: Наукова думка, 1992.

2. Нуржанов О.Д., Исмайлова Н.К. *О решении многоточечной краевой задачи для интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра* // Вестник Каракалпакского государственного университета им. Бердаха. 2021. Т. 55. № 4. С. 11–14.

АППРОКСИМАЦИИ ЭРМИТА–ЯКОБИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ФУНКЦИЙ

Т.М. Оснач, Н.В. Рябченко, А.П. Старовойтов

Пусть $\mathbf{f} = (f_1, ..., f_k)$ – набор, состоящий из k степенных рядов

$$f_j(z) = \sum_{i=0}^{\infty} f_i^j z^i, \quad j = 1, ..., k \tag{1}$$

с комплексными коэффициентами. Не ограничивая общности, считаем, что все ряды в (1) сходятся в некоторой окрестности нуля и тем самым равенства (1) определяют систему $\mathbf{f}$, состоящую из функций аналитических в окрестности нуля.

Множество k–мерных мультииндексов, т. е. упорядоченных k целых неотрицательных чисел, обозначим $\mathbb{Z}_+^k$. Порядок мультииндекса $\overrightarrow{m} = (m_1, ..., m_k) \in \mathbb{Z}_+^k$ — это сумма $m = m_1 + ... + m_k$. Зафиксируем индекс $n \in \mathbb{Z}_+^1$ и мультииндекс $\overrightarrow{m} = (m_1, m_2, \ldots, m_k) \in \mathbb{Z}_+^k$.

Определение 1. Аппроксимациями Эрмита–Паде для пары $(n, \overrightarrow{m})$ и системы функций (1) называются рациональные дроби

$$\pi^j_{n_j,\overrightarrow{m}}(z) = \pi^j_{n_j,\overrightarrow{m}}(z; \mathbf{f}) = \frac{P^j_{n_j}(z)}{Q_m(z)} \;\; j = 1, ..., k,$$

где тождественно не равный нулю многочлен $Q_m(z) = Q_m(z, \mathbf{f})$, $\deg Q_m \leqslant m$ и многочлены $P^j_{n_j}(z) = P^j_{n_j}(z; \mathbf{f})$, $\deg P^j_{n_j} \leqslant n_j$, $n_j = n + m - m_j$ при $j = 1, ..., k$ удовлетворяют условиям

$$Q_m(z) f_j(z) - P^j_{n_j}(z) = O(z^{n+m+1}). \tag{2}$$

Если $k = 1$, то $\mathbf{f}$ состоит из одной функции $f(z) = f_1(z)$. В этом случае $\pi^1_{n_1,\overrightarrow{m}}(z; f_1)$ называют аппроксимацией Паде порядка (n, m) и обозначают $\pi_{n,m}(z; f)$ [1].