2) предельная функция $x^*(t, x_0)$ является решением краевой задачи (1), (2) тогда и только тогда, когда, если точка $x_0 = x_0^*$ является решением определяющего уравнения:

$$\Delta(x_0) = \frac{1}{T}\left[g(x_0) + R(T,0)x_0\right] -$$

$$-\frac{1}{T}\int\limits_0^T R(T,\tau) f\left(\tau, x^*(\tau, x_0), \int\limits_0^\tau \varphi(\tau, s, x^*(s, x_0))\,ds\right) d\tau = 0.$$

При подстановке этого значения $x = x_0^*$ в (3), получим приближенное решение краевой задачи (1), (2).

Литература

1. Самойленко А.М., Ронто Н.И. *Численно-аналитические методы в теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений.* Киев: Наукова думка, 1992.

2. Нуржанов О.Д., Исмайлова Н.К. *О решении многоточечной краевой задачи для интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра* // Вестник Каракалпакского государственного университета им. Бердаха. 2021. Т. 55. № 4. С. 11–14.

АППРОКСИМАЦИИ ЭРМИТА–ЯКОБИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ФУНКЦИЙ

Т.М. Оснач, Н.В. Рябченко, А.П. Старовойтов

Пусть $\mathbf{f} = (f_1, ..., f_k)$ – набор, состоящий из k степенных рядов

$$f_j(z) = \sum_{i=0}^{\infty} f_i^j z^i, \quad j = 1, ..., k \tag{1}$$

с комплексными коэффициентами. Не ограничивая общности, считаем, что все ряды в (1) сходятся в некоторой окрестности нуля и тем самым равенства (1) определяют систему $\mathbf{f}$, состоящую из функций аналитических в окрестности нуля.

Множество k–мерных мультииндексов, т. е. упорядоченных k целых неотрицательных чисел, обозначим $\mathbb{Z}_+^k$. Порядок мультииндекса $\overrightarrow{m} = (m_1, ..., m_k) \in \mathbb{Z}_+^k$ — это сумма $m = m_1 + ... + m_k$. Зафиксируем индекс $n \in \mathbb{Z}_+^1$ и мультииндекс $\overrightarrow{m} = (m_1, m_2, \ldots, m_k) \in \mathbb{Z}_+^k$.

Определение 1. Аппроксимациями Эрмита–Паде для пары $(n, \overrightarrow{m})$ и системы функций (1) называются рациональные дроби

$$\pi^j_{n_j,\overrightarrow{m}}(z) = \pi^j_{n_j,\overrightarrow{m}}(z; \mathbf{f}) = \frac{P^j_{n_j}(z)}{Q_m(z)} \;\; j = 1, ..., k,$$

где тождественно не равный нулю многочлен $Q_m(z) = Q_m(z, \mathbf{f})$, $\deg Q_m \leqslant m$ и многочлены $P^j_{n_j}(z) = P^j_{n_j}(z; \mathbf{f})$, $\deg P^j_{n_j} \leqslant n_j$, $n_j = n + m - m_j$ при $j = 1, ..., k$ удовлетворяют условиям

$$Q_m(z) f_j(z) - P^j_{n_j}(z) = O(z^{n+m+1}). \tag{2}$$

Если $k = 1$, то $\mathbf{f}$ состоит из одной функции $f(z) = f_1(z)$. В этом случае $\pi^1_{n_1,\overrightarrow{m}}(z; f_1)$ называют аппроксимацией Паде порядка (n, m) и обозначают $\pi_{n,m}(z; f)$ [1].

Определение 2. Аппроксимациями Эрмита–Якоби для пары $(n, \overrightarrow{m})$ и системы функций $\mathbf{f}$, определённых равенствами (1), будем называть (см. [2]) рациональные дроби

$$\widehat{\pi}^j_{n_j,\overrightarrow{m}}(z) = \widehat{\pi}^j_{n_j,\overrightarrow{m}}(z;\mathbf{f}) = \frac{\widehat{P}^j_{n_j}(z)}{\widehat{Q}_m(z)},$$

где многочлены, стоящие в числителе и знаменателе, $\widehat{Q}_m(z) = \widehat{Q}_m(z,\mathbf{f})$, $\deg \widehat{Q}_m \leqslant m$, $\widehat{P}_{n_j}(z) = \widehat{P}_{n_j}(z;\mathbf{f})$, $\deg \widehat{P}^j_{n_j} \leqslant n_j$, $n_j = n + m - m_j$ при $j = 1, ..., k$ подбираются таким образом, чтобы

$$f_j(z) - \frac{\widehat{P}^j_{n_j}(z)}{\widehat{Q}_m(z)} = O(z^{n+m+1}). \tag{3}$$

Аппроксимации Эрмита–Паде $\{\pi^j_{n_j,m}(z)\}_{j=1}^k$ определяются однозначно [3], в то время как аппроксимации Эрмита–Якоби могут не существовать. К. Якоби в [2] при $k = 1$ нашёл достаточное условие (теорема Якоби) их существования. В данном сообщение получено обобщение теоремы Якоби на случай произвольных $k > 1$.

Для единственности существования многочленов $Q_m(z)$, $P^j_{n_j}(z)$ необходимо и достаточно (см. [3], [4]), чтобы ранг матрицы $F_{n,\overrightarrow{m}}$ порядка $m \times (m+1)$ был максимальный, т. е. равен m. Матрица $F_{n,\overrightarrow{m}}$ определяется равенством

$$F_{n,\overrightarrow{m}} = \begin{pmatrix} f^1_{n-m_1+1} & f^1_{n-m_1+2} & \cdots & f^1_{n_1+1} \\ f^1_{n-m_1+2} & f^1_{n-m_1+3} & \cdots & f^1_{n_1+2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f^1_n & f^1_{n+1} & \cdots & f^1_{n+m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f^k_{n-m_k+1} & f^k_{n-m_k+2} & \cdots & f^k_{n_k+1} \\ f^k_{n-m_k+2} & f^k_{n-m_k+3} & \cdots & f^k_{n_k+2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f^k_n & f^k_{n+1} & \cdots & f^k_{n+m} \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Матрица $F_{n,\overrightarrow{m}}$ состоит из блок-матриц

$$F^j = \begin{pmatrix} f^j_{n-m_j+1} & f^j_{n-m_j+2} & \cdots & f^j_{n_j+1} \\ f^j_{n-m_j+2} & f^j_{n-m_j+3} & \cdots & f^j_{n_j+2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f^j_n & f^j_{n+1} & \cdots & f^j_{n+m} \end{pmatrix}$$

порядка $m_j \times (m+1)$, расположенных друг над другом в порядке следования. В случае, если $m_j = 0$ матрица $F_{n,\overrightarrow{m}}$ не содержит блок-матрицу F^j. При $k = 1$ либо $\overrightarrow{m} = (m_1, 0, 0, ..., 0)$ матрица $F_{n,\overrightarrow{m}}$ состоит из одного блока F^1. Если в $F_{n,\overrightarrow{m}}$ удалить последний столбец, то получим квадратную матрицу порядка m. Определитель этой матрицы обозначим через $H_{n,\overrightarrow{m}}$. Тогда

$$H_{n,\overrightarrow{m}} = \begin{vmatrix} f^1_{n-m_1+1} & f^1_{n-m_1+2} & \cdots & f^1_{n_j} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f^1_n & f^1_{n+1} & \cdots & f^1_{n+m-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f^k_{n-m_k+1} & f^k_{n-m_k+2} & \cdots & f^k_{n_k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f^k_n & f^k_{n+1} & \cdots & f^k_{n+m-1} \end{vmatrix}.$$

Теорема 1. Если для мультииндекса $(n, \overrightarrow{m})$ и системы функций $\mathbf{f}$, определенных равенствами (1), определитель $H_{n,\overrightarrow{m}} \neq 0$, то аппроксимации Эрмите–Якоби существуют, определяются единственным образом и каждая из них тождественно совпадает с соответствующей аппроксимацией Эрмита – Паде, т. е.

$$\widehat{\pi}^{j}_{n_j,\overrightarrow{m}}(z;\mathbf{f}) = \pi^{j}_{n_j,\overrightarrow{m}}(z;\mathbf{f}), \quad j = 1, \ldots, k. \tag{5}$$

Систему $\mathbf{f}$ назовём вполне совершенной [4], если для любого мультииндекса $(n, \overrightarrow{m})$

$$\deg Q_m = m, \ \deg P^j_{n_j} = n_j, \ \text{НОД}(Q_m, P^j_{n_j}) = 1.$$

Следствие 1. Если система $\mathbf{f}$ вполне совершенна, то для любого мультииндекса $(n, \overrightarrow{m})$ существуют аппроксимации Эрмита–Якоби и справедливы равенства (5).

Следствие 2.Теорема Якоби (см. [2]) является является частным случаем теоремы 1.

Литература

1. Бейкер Дж. мл., Грейвс-Моррис П.*Аппроксимации Паде. 1. Основы теории. 2. Обобщения и приложения.* М.: Мир, 1986.
2. Jacobi C. *"Uber die Darstellung einer Reihe gegebner Werthe durch eine gebrochne rationale Function* // Journal für die reine und angewandte Mathematik. 2019. № 30. P. 127–156.
3. Старовойтов А. П., Рябченко Н. В. *О единственности решений задач Эрмита – Паде* // Весці Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. 2019. Т. 55. № 4. С. 445–456.
4. Старовойтов А. П., Рябченко Н. В. *О детерминантных передставлениях многочленов Эрмита – Паде* // Труды Московского математического общества. 2022. Т. 83. № 1. С. 17–36.

О СУЩЕСТВОВАНИИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ АППРОКСИМАЦИЙ ЭРМИТА – ЯКОБИ

А. П. Старовойтов, Е. П. Кечко, Т. М. Оснач

Пусть $\mathbf{f^t} = (f^t_1, \ldots, f^t_k)$ – набор тригонометрических рядов

$$f^t_j(x) = \frac{a^j_0}{2} + \sum_{l=1}^{\infty} \left(a^j_l \cos lx + b^j_l \sin lx \right), \ \ j = 1, 2 \ldots, k \tag{1}$$

с действительными коэффициентами. Считаем, что ряды (1) сходятся при всех $x \in \mathbb{R}$ и каждый из них задаёт функцию, определенную на всей действительной прямой.

Множество k–мерных мультииндексов, являющихся упорядоченным набором k целых неотрицательных чисел, обозначим $\mathbb{Z}^k_+$. Порядок мультииндекса $\overrightarrow{m} = (m_1, \ldots, m_k) \in \mathbb{Z}^k_+$ — это сумма $m = m_1 + \ldots + m_k$. Зафиксируем индекс $n \in \mathbb{Z}^1_+$ и мультииндекс $\overrightarrow{m} = (m_1, \ldots, m_k) \in \mathbb{Z}^k_+$ и рассмотрим следующую задачу:

Задача $\mathbf{A^t}$. *Для набора тригонометрических рядов (1) найти тождественно не равный нулю тригонометрический многочлен* $Q^t_m(x) = Q^t_{n,\overrightarrow{m}}(x; \mathbf{f^t})$, $\deg Q^t_m \leqslant m$ *и такие тригонометрические многочлены* $P^t_j(x) = P^t_{n_j,n,\overrightarrow{m}}(x; \mathbf{f^t})$, $\deg P^t_j \leqslant n_j$, $n_j = n + m - m_j$, *чтобы для* $j = 1, \ldots, k$

$$Q^t_m(x) f^t_j(x) - P^t_j(x) = \sum_{l=n+m+1}^{\infty} (\tilde{a}^j_l \cos lx + \tilde{b}^j_l \sin lx), \ \ j = 1, 2 \ldots, k,$$