Теорема 1. Если для мультииндекса $(n, \overrightarrow{m})$ и системы функций $\mathbf{f}$, определенных равенствами (1), определитель $H_{n,\overrightarrow{m}} \neq 0$, то аппроксимации Эрмите–Якоби существуют, определяются единственным образом и каждая из них тождественно совпадает с соответствующей аппроксимацией Эрмита – Паде, т. е.

$$\widehat{\pi}^{j}_{n_j,\overrightarrow{m}}(z;\mathbf{f}) = \pi^{j}_{n_j,\overrightarrow{m}}(z;\mathbf{f}), \quad j = 1, \ldots, k. \tag{5}$$

Систему $\mathbf{f}$ назовём вполне совершенной [4], если для любого мультииндекса $(n, \overrightarrow{m})$

$$\deg Q_m = m, \ \deg P^j_{n_j} = n_j, \ \text{НОД}(Q_m, P^j_{n_j}) = 1.$$

Следствие 1. Если система $\mathbf{f}$ вполне совершенна, то для любого мультииндекса $(n, \overrightarrow{m})$ существуют аппроксимации Эрмита–Якоби и справедливы равенства (5).

Следствие 2.Теорема Якоби (см. [2]) является является частным случаем теоремы 1.

Литература

1. Бейкер Дж. мл., Грейвс-Моррис П.*Аппроксимации Паде. 1. Основы теории. 2. Обобщения и приложения.* М.: Мир, 1986.

2. Jacobi C. *"Uber die Darstellung einer Reihe gegebner Werthe durch eine gebrochne rationale Function* // Journal für die reine und angewandte Mathematik. 2019. № 30. P. 127–156.

3. Старовойтов А. П., Рябченко Н. В. *О единственности решений задач Эрмита – Паде* // Весцi Нацыянальнай акадэмii навук Беларусi. 2019. Т. 55. № 4. С. 445–456.

4. Старовойтов А. П., Рябченко Н. В. *О детерминантных передставлениях многочленов Эрмита – Паде* // Труды Московского математического общества. 2022. Т. 83. № 1. С. 17–36.

О СУЩЕСТВОВАНИИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ АППРОКСИМАЦИЙ ЭРМИТА – ЯКОБИ

А. П. Старовойтов, Е. П. Кечко, Т. М. Оснач

Пусть $\mathbf{f^t} = (f^t_1, \ldots, f^t_k)$ – набор тригонометрических рядов

$$f^t_j(x) = \frac{a^j_0}{2} + \sum_{l=1}^{\infty} \left(a^j_l \cos lx + b^j_l \sin lx\right), \ \ j = 1, 2 \ldots, k \tag{1}$$

с действительными коэффициентами. Считаем, что ряды (1) сходятся при всех $x \in \mathbb{R}$ и каждый из них задаёт функцию, определенную на всей действительной прямой.

Множество k –мерных мультииндексов, являющихся упорядоченным набором k целых неотрицательных чисел, обозначим $\mathbb{Z}^k_+$. Порядок мультииндекса $\overrightarrow{m} = (m_1, \ldots, m_k) \in \mathbb{Z}^k_+$ — это сумма $m = m_1 + \ldots + m_k$. Зафиксируем индекс $n \in \mathbb{Z}^1_+$ и мультииндекс $\overrightarrow{m} = (m_1, \ldots, m_k) \in \mathbb{Z}^k_+$ и рассмотрим следующую задачу:

Задача $\mathbf{A^t}$. *Для набора тригонометрических рядов (1) найти тождественно не равный нулю тригонометрический многочлен* $Q^t_m(x) = Q^t_{n,\overrightarrow{m}}(x;\mathbf{f^t})$, $\deg Q^t_m \leqslant m$ *и такие тригонометрические многочлены* $P^t_j(x) = P^t_{n_j,n,\overrightarrow{m}}(x;\mathbf{f^t})$, $\deg P^t_j \leqslant n_j$, $n_j = n + m - m_j$, *чтобы для* $j = 1, \ldots, k$

$$Q^t_m(x) f^t_j(x) - P^t_j(x) = \sum_{l=n+m+1}^{\infty} (\tilde{a}^j_l \cos lx + \tilde{b}^j_l \sin lx), \ \ j = 1, 2 \ldots, k,$$

где $\tilde{a}_l^j$, $\tilde{b}_l^j$ *, как и коэффициенты тригонометрических многочленов* $Q_m^t(x)$, $P_j^t(x)$ *, могут быть, вообще говоря, комплексными числами.*

Если пара (Q_m^t, P^t) , где $P^t = (P_1^t, \ldots, P_k^t)$, является решением задачи $\mathbf{A^t}$, то многочлены $Q_m^t(x)$, $P_1^t(x)$, $\ldots$, $P_k^t(x)$ и рациональные дроби

$$\pi_j^t(x) = \pi_{j,n,\overrightarrow{m}}^t(x; \mathbf{f^t}) = \frac{P_j^t(x)}{Q_m^t(x)}, \ \ j = 1, 2..., k$$

будем называть, соответственно, *тригонометрическими многочленами Эрмита–Паде* и *тригонометрическими аппроксимациями Эрмита–Паде* (*совместными аппроксимациями Эрмита–Фурье*) для мультииндекса $(n, \overrightarrow{m})$ и системы $\mathbf{f^t}$ функций.

Определение. Рациональные функции вида

$$\widehat{\pi}_j^t(x) = \widehat{\pi}_{n_j,n,\overrightarrow{m}}^t(x; \mathbf{f^t}) = \frac{\widehat{P}_j^t(x)}{\widehat{Q}_m^t(x)}, \ \ j = 1, ..., k\,,$$

где тригонометрические многочлены $\widehat{Q}_m^t(x) = \widehat{Q}_{n,\overrightarrow{m}}^t(x; \mathbf{f^t})$, $\widehat{P}_j^t(x) = \widehat{P}_{n_j,n,\overrightarrow{m}}^t(x; \mathbf{f^t})$ имеют степени, соответственно, не выше m и n_j , $n_j = n + m - m_j$, будем называть тригонометрическими аппроксимациями Эрмита – Якоби для мультииндекса $(n, \overrightarrow{m})$ и системы функций $\mathbf{f^t}$, если $\widehat{\pi}_j^t(x)$ представима своим рядом Фурье и

$$f_j^t(x) - \frac{\widehat{P}_j^t(x)}{\widehat{Q}_m^t(x)} = \sum_{l=n+m+1}^{\infty} (\tilde{a}_l^j \cos lx + \tilde{b}_l^j \sin lx), \ \ j = 1, ..., k. \tag{2}$$

Многочлены $\widehat{Q}_m^t(x), \widehat{P}_1^t(x), ..., \widehat{P}_k^t(x)$, удовлетворяющие условиям (2), будем называть *тригонометрическими многочленами Эрмита – Якоби.*

Введем в рассмотрение однопараметрическое семейство функций (параметр $\lambda \in \mathbb{R}$), представленных тригонометрическими рядами

$$G(x; \lambda) = e^{\lambda \cos x}(\cos(\lambda \sin x)) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\lambda^l}{l!} \cos lx\,,$$

$$H(x; \lambda) = e^{\lambda \cos x}(\sin(\lambda \sin x)) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\lambda^l}{l!} \sin lx\,.$$

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть* $\{\lambda_j\}_{j=1}^k$ *– набор различных не равных нулю действительных чисел. Тогда для мультииндекса* $(n, \overrightarrow{m}) \in \mathbb{Z}_+^{k+1}$ *, удовлетворяющего условию* $n \geqslant \max_{1 \leqslant j \leqslant k} m_j$ *, и системы функций* $\mathbf{G_k} = \{G(x; \lambda_j)\}_{j=1}^k$ *существуют тригонометрические аппроксимации Эрмита–Якоби* $\{\widehat{\pi}_j^t(x; \mathbf{G_k})\}_{j=1}^k$ *, и при соответствующей нормировке для их знаменателя и числителей справедливы представления: при* $j = 1, ..., k$

$$\widehat{Q}_m^t(x; \mathbf{G_k}) = \widehat{Q}_{n,\overrightarrow{m}}^t(x; \mathbf{G_k}) = Q_m(e^{ix}; \mathbf{E_k}) \cdot \overline{Q_m(e^{ix}; \mathbf{E_k})} =$$

$$= \frac{1}{[(n+m)!]^2} \left| \int_0^{+\infty} T(x) e^{-t(\cos x + i \sin x)} dt \right|^2,$$

$$\widehat{P}_j^t(x; \mathbf{G_k}) = \widehat{P}_{n_j,n,\overrightarrow{m}}^t(x; \mathbf{G_k}) = Re \left\{ P_{n_j}^j(e^{ix}; \mathbf{E_k}) \cdot \overline{Q_m(e^{ix}; \mathbf{E_k})} \right\},$$

где многочлены $Q_m(z;\mathbf{E_k})$, $P^j_{n_j}(z;\mathbf{E_k})$ *представляются в виде интегралов Эрмита (см. [1, гл. 4, § 2]).*

Теорема 2. *Пусть* $\{\lambda_j\}_{j=1}^k$ *– набор различных не равных нулю действительных чисел. Тогда для мультииндекса* $(n,\overrightarrow{m}) \in \mathbb{Z}_+^{k+1}$, *удовлетворяющего условию* $n \geqslant \max_{1\leqslant j\leqslant k} m_j$, *и системы функций* $\mathbf{H_k} = \{H(x;\lambda_j)\}_{j=1}^k$ *существуют тригонометрические аппроксимации Эрмита – Якоби* $\{\widehat{\pi}^t_j(x;\mathbf{H_k})\}_{j=1}^k$ *и при соответствующей нормировке справедливы представления: при* $j=1,\dots,k$

$$\widehat{Q}^t_m(x;\mathbf{H_k}) = \widehat{Q}^t_{n,\overrightarrow{m}}(x;\mathbf{H_k}) = Q_m(e^{ix};\mathbf{E_k})\cdot\overline{Q_m(e^{ix};\mathbf{E_k})} =$$

$$= \frac{1}{[(n+m)!]^2}\left|\int\limits_0^{+\infty} T(x)e^{-t(\cos x+i\sin x)}dt\right|^2,$$

$$\widehat{P}^t_j(x;\mathbf{H_k}) = \widehat{P}^t_{n_j,n,\overrightarrow{m}}(x;\mathbf{H_k}) = Im\left\{P^j_{n_j}(e^{ix};\mathbf{E_k})\cdot\overline{Q_m(e^{ix};\mathbf{E_k})}\right\},$$

где многочлены $Q_m(z;\mathbf{E_k})$, $P^j_{n_j}(z;\mathbf{E_k})$ *представляются в виде интегралов Эрмита (см. [1, гл. 4, § 2]).*

Данная работа является продолжением исследований, начатых в [2].

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования в рамках государственной программы научных исследований "Конвергенция-2025".

Литература

1. Никишин Е. М., Сорокин В. Н. *Рациональные аппроксимации и ортогональность.* М.: Наука, 1988.

2. Лабыч Ю. А., Старовойтов А. П. *Тригонометрические аппроксимации Паде функций с регулярно убывающими коэффициентами Фурье* // Математический сборник. 2009. Т. 200, № 7. С. 107–130.

ФОРМУЛЫ РЕГУЛЯРИЗОВАННЫХ СЛЕДОВ ОПЕРАТОРА ДИРАКА С ОСОБЕННОСТЬЮ В ПОТЕНЦИАЛЕ

М.Б. Танирбергенов

В 1994 году П.Д.Лакс [1] предложил элементарный способ вычисления регуляризованного следа оператора Штурма–Лиувилля, т.е. методом «деформации» потенциала по параметру $t\in[0,\ 1]$, который справедлив для самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве.

В настоящей заметке методом Лакса вычисляется регуляризованный след для оператора Дирака с особенностью в потенциале.

Рассмотрим следующий дифференциальный оператор

$$Dy \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} y'_1\\ y'_2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p(x) & -\frac{1}{x}+q(x)\\ -\frac{1}{x}+q(x) & -p(x)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1\\ y_2\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} y_1\\ y_2\end{pmatrix}, \quad 0<x<\pi \qquad (1)$$

с граничными условиями

$$y_2(0)=0, \qquad y_2(\pi)=0, \qquad (2)$$

где $p(x)$ и $q(x)$ – действительные функции из класса $C^2[0,\pi]$.

Лемма 1. *Пусть* $p(x)\equiv 0$, $q(x)\equiv 0$. *Тогда*

1) общее решение уравнения (1) даётся формулой