где многочлены $Q_m(z;\mathbf{E_k})$, $P^j_{n_j}(z;\mathbf{E_k})$ *представляются в виде интегралов Эрмита (см. [1, гл. 4, § 2]).*

Теорема 2. *Пусть* $\{\lambda_j\}_{j=1}^k$ *– набор различных не равных нулю действительных чисел. Тогда для мультииндекса* $(n,\overrightarrow{m}) \in \mathbb{Z}_+^{k+1}$, *удовлетворяющего условию* $n \geqslant \max_{1\leqslant j\leqslant k} m_j$, *и системы функций* $\mathbf{H_k} = \{H(x;\lambda_j)\}_{j=1}^k$ *существуют тригонометрические аппроксимации Эрмита – Якоби* $\{\widehat{\pi}^t_j(x;\mathbf{H_k})\}_{j=1}^k$ *и при соответствующей нормировке справедливы представления: при* $j=1,...,k$

$$\widehat{Q}^t_m(x;\mathbf{H_k}) = \widehat{Q}^t_{n,\overrightarrow{m}}(x;\mathbf{H_k}) = Q_m(e^{ix};\mathbf{E_k})\cdot\overline{Q_m(e^{ix};\mathbf{E_k})} =$$

$$= \frac{1}{[(n+m)!]^2}\left|\int\limits_0^{+\infty} T(x)e^{-t(\cos x + i\sin x)}dt\right|^2,$$

$$\widehat{P}^t_j(x;\mathbf{H_k}) = \widehat{P}^t_{n_j,n,\overrightarrow{m}}(x;\mathbf{H_k}) = Im\left\{P^j_{n_j}(e^{ix};\mathbf{E_k})\cdot\overline{Q_m(e^{ix};\mathbf{E_k})}\right\},$$

где многочлены $Q_m(z;\mathbf{E_k})$, $P^j_{n_j}(z;\mathbf{E_k})$ *представляются в виде интегралов Эрмита (см. [1, гл. 4, § 2]).*

Данная работа является продолжением исследований, начатых в [2].

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования в рамках государственной программы научных исследований "Конвергенция-2025".

Литература

1. Никишин Е. М., Сорокин В. Н. *Рациональные аппроксимации и ортогональность.* М.: Наука, 1988.

2. Лабыч Ю. А., Старовойтов А. П. *Тригонометрические аппроксимации Паде функций с регулярно убывающими коэффициентами Фурье* // Математический сборник. 2009. Т. 200, № 7. С. 107–130.

ФОРМУЛЫ РЕГУЛЯРИЗОВАННЫХ СЛЕДОВ ОПЕРАТОРА ДИРАКА С ОСОБЕННОСТЬЮ В ПОТЕНЦИАЛЕ

М.Б. Танирбергенов

В 1994 году П.Д.Лакс [1] предложил элементарный способ вычисления регуляризованного следа оператора Штурма–Лиувилля, т.е. методом «деформации» потенциала по параметру $t\in[0,\ 1]$, который справедлив для самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве.

В настоящей заметке методом Лакса вычисляется регуляризованный след для оператора Дирака с особенностью в потенциале.

Рассмотрим следующий дифференциальный оператор

$$Dy \equiv \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y'_1\\ y'_2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}p(x) & -\frac{1}{x}+q(x)\\ -\frac{1}{x}+q(x) & -p(x)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}, \quad 0<x<\pi \qquad (1)$$

с граничными условиями

$$y_2(0)=0, \qquad y_2(\pi)=0, \qquad (2)$$

где $p(x)$ и $q(x)$ – действительные функции из класса $C^2[0,\pi]$.

Лемма 1. *Пусть* $p(x)\equiv 0$, $q(x)\equiv 0$. *Тогда*

1) общее решение уравнения (1) даётся формулой

$$\begin{cases} \varphi_1(x,\lambda) = C_1\left(\frac{\cos\lambda x}{\lambda} - \frac{1}{x}\cdot\frac{\sin\lambda x}{\lambda^2}\right) + C_2\left(-\sin\lambda x - \frac{1}{x}\cdot\frac{\cos\lambda x}{\lambda}\right), \\ \varphi_2(x,\lambda) = C_1\frac{\sin\lambda x}{\lambda} + C_2\cos\lambda x, \end{cases} \quad \text{при } \lambda \neq 0,$$

$$\begin{cases} \varphi_1(x,\lambda) = \frac{C_1}{x}, \\ \varphi_2(x,\lambda) = C_2 x, \end{cases} \quad \text{при } \lambda = 0;$$

2) собственные значения и ортонормированные собственные вектор–функции граничной задачи (1), (2) соответственно имеют вид:

$$\lambda_n = n, \qquad n \in Z, \qquad n \neq 0,$$

$$y_n(x) = \begin{pmatrix} y_{n1}(x) \\ y_{n2}(x) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\begin{pmatrix} \cos nx - \frac{1}{x}\frac{\sin nx}{n} \\ \sin nx \end{pmatrix}, \qquad n \in Z, \qquad n \neq 0;$$

3) выполняются тождества

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[y_{n,1}^2(x) + y_{-n,1}^2(x) - y_{n,2}^2(x) - y_{-n,2}^2(x)\right] = \frac{1}{2}[\delta(x) + \delta(x-\pi)],$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[2y_{n,1}(x)y_{n,2}(x) + 2y_{-n,1}(x)y_{-n,2}(x)\right] = 0, \quad (0 < x < \pi)$$

где $\delta(x)$ *– «дельта» –функция Дирака.*

Лемма 2. *Ряды*

$$\sum_{0\neq n=-\infty}^{\infty}[y_{n1}^2(x,t) - y_{n2}^2(x,t)], \qquad \sum_{0\neq n=-\infty}^{\infty} 2y_{n1}(x,t)y_{n2}(x,t)$$

сходятся в обобщенном смысле и их сумма не зависит от t *.*

Теорема. *Пусть* $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ *– собственные значения граничной задачи (1), (2), тогда справедливо равенство*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda_n + \lambda_{-n}) = \frac{1}{2}[p(0) + p(\pi)].$$

Литература

1. Lax P. D. *Trace Formulas for the Schroedinger operator* // Comm. Pure and Appl. Math. 1994. Vol. XLVII. P. 503-512.

2. Левитан Б.М., Саргсян И.С. *Операторы Штурма–Лиувилля и Дирака.* – Москва, «Наука», 1988.

3. Левитан Б.М. *Вычисление регуляризованного следа для оператора Штурма–Лиувилля* // УМН. 1964. Т. 19 (115). № 1. С. 161-165.

4. Яхшимуратов А.Б. *Вычисление регуляризованного следа оператора Дирака методом П.Д. Лакса.* // УзМЖ. 1998. № 6. С. 76-80.