СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЙ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ, УПРАВЛЯЕМЫХ ГРУБЫМИ ТРАЕКТОРИЯМИ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

М.А. Фирсов, М.М. Васьковский

Пусть H и U – сепарабельные гильбертовы пространства; B, B_1 и B_2 – произвольные банаховы пространства; $\mathcal{L}_2(H,U)$ – множество операторов Гильберта-Шмидта, действующих из H в U.

Замечание. Некоторые обозначения, которые мы будем использовать без определения, такие как $\|\cdot\|_{\tilde{X},2\alpha,\beta}$, $\hat{C}^\alpha$ и др., определяются так же, как и в [1].

Определение 1. Множество функций от двух переменных $h:[0,T]\times[0,T]\to B$, для которых

$$\|h\|_\alpha := \sup_{s,t\in[0,T],s\neq t}\frac{\|h_{s,t}\|_B}{|t-s|^\alpha}<\infty,$$

обозначим через $C_2^\alpha([0,T]^2,B)$, где $\alpha\in(0,1]$.

Если $f\in C^\alpha([0,T],B)$ – непрерывная по Гёльдеру функция от одной переменной, то $f_{s,t}:=f(t)-f(s)\in C_2^\alpha([0,T]^2,B)$, где $s,t\in[0,T]$.

Определение 2. Пусть $\alpha\in(\frac{1}{3},\frac{1}{2}]$. Под $\mathcal{C}^\alpha([0,T],H)$ будем понимать множество всех пар $(X,\mathbb{X})$ таких, что процесс $X\in C^\alpha([0,T],H)$, а $\mathbb{X}\in C_2^{2\alpha}([0,T]^2,H\otimes H)$ является процессом второго порядка над X, то есть выполняется следующее тождество Чена:

$$\mathbb{X}_{s,t}-\mathbb{X}_{s,u}-\mathbb{X}_{u,t}=X_{s,u}\otimes X_{u,t}$$

для любой тройки $(s,u,t)\in[0,T]^3$.

Рассмотрим эволюционное уравнение следующего вида:

$$du_t=Lu_tdt+f(u_t)dt+g(u_t)d\mathbf{X}_t,\quad u_0=\xi\in U,\tag{1}$$

где $\mathbf{X}=(X,\mathbb{X})\in\mathcal{C}^\alpha([0,T],H)$, $\alpha\in(\frac{1}{3},\frac{1}{2}]$; $f:U\to U$, $g:U\to\mathcal{L}_2(H,U)$; L – отрицательно определённый самосопряжённый оператор, порождающий аналитическую C_0-полугруппу на U, которую будем обозначать как $\{S_t\}_{t\geq 0}$. В качестве примера такого оператора L может выступать оператор Лапласа Δ, при $U=H=L^2[0,1]$.

Уравнение (1) можно записать в следующем виде:

$$du_t=Lu_tdt+F(u_t)d\tilde{\mathbf{X}}_t,\quad u_0=\xi\in U,\tag{2}$$

где $F(u_t)=\begin{pmatrix}f(u_t)\\ g(u_t)\end{pmatrix}$ и $\tilde{\mathbf{X}}_t=\begin{pmatrix}t\\ \mathbf{X}_t\end{pmatrix}$.

Уравнение (2) для случая, когда $\mathbf{X}=(X,\mathbb{X})\in\mathcal{C}^\alpha([0,T],\mathbb{R}^d)$, $\alpha\in(\frac{1}{3};\frac{1}{2}]$, было исследовано на существование и единственность решений в работах [1] и [2]. В данной работе показывается, что их результаты можно перенести на случай, когда $\mathbf{X}=(X,\mathbb{X})\in\in\mathcal{C}^\alpha([0,T],H)$.

Определение 3. Будем говорить, что функция $Y\in C^\alpha([0,T],B)$ управляется грубой траекторией $\tilde{\mathbf{X}}\in\mathcal{C}^\alpha([0,T],H\times[0,T])$ в соответствии с полугруппой $\{S_t\}_{t\geq 0}$, если существует такой элемент $Y'\in C^\alpha([0,T],\mathcal{L}_2(H\times[0,T],B))$, что выражение

$$R^Y_{s,t}:=Y_t-S_{t-s}(Y_s+Y'_s\tilde{X}_{s,t})$$

удовлетворяет неравенству $\|R^Y\|_{2\alpha}<\infty$. Под $\mathcal{D}^{2\alpha}_{S,\tilde{X}}([0,T],B)$ будем понимать множество всех таких пар (Y,Y').

Определение 4. Пространство функций $f : B_1 \to B_2$, имеющих непрерывные и ограниченные производные Фреше до порядка k включительно, будем обозначать через $C_b^k(B_1, B_2)$.

Определение 5. Для любого $\beta \in \mathbb{R}$ обозначим через U_β сепарабельное гильбертово пространство $D((-L)^\beta)$ с нормой $\|\cdot\|_{U_\beta} = \|(-L)^\beta \cdot\|_U$.

Лемма 1. *Пусть* $\tilde{\boldsymbol{X}} = (\tilde{X}, \tilde{\mathbb{X}}) \in \mathcal{C}^\alpha([0,T], H \times [0,T])$ *для некоторого* $\alpha \in (\frac{1}{3}; \frac{1}{2}]$ *и* $(Y, Y') \in \mathcal{D}^{2\alpha}_{S,\tilde{X}}([0,T], \mathcal{L}_2(H \times [0,T], U_\beta^2))$. *Тогда интеграл*

$$\int\limits_s^t S_{t-r} Y_r d\tilde{\boldsymbol{X}}_r := \lim_{|\mathcal{P}| \to 0} \sum_{[t_i, t_{i+1}] \in \mathcal{P}} S_{t-t_i}(Y_{t_i} \tilde{X}_{t_i, t_{i+1}} + Y'_{t_i} \tilde{\mathbb{X}}_{t_i, t_{i+1}}) \tag{3}$$

корректно определён и для каждого $0 \le \gamma < 3\alpha$ *выполняется оценка*

$$\|\int\limits_s^t S_{t-r} Y_r d\tilde{\boldsymbol{X}}_r - S_{t-s} Y_s \tilde{X}_{s,t} - S_{t-s} Y'_s \tilde{\mathbb{X}}_{s,t}\|_{U_{\beta+\gamma}} \le C(\|R^Y\|_{2\alpha} \|\tilde{X}\|_\alpha + \|Y'\|_\alpha \|\tilde{\mathbb{X}}\|_{2\alpha}) |t-s|^{3\alpha-\gamma},$$

где C *— универсальная постоянная.*

Лемма 2. *Пусть* $\alpha \in (\frac{1}{3}; \frac{1}{2}]$, $n \in \mathbb{N}$, $\tilde{\boldsymbol{X}} \in \mathcal{C}^\alpha([0,T], H \times [0,T])$, $F \in C_b^2(U_\gamma, U_\gamma^n)$, *для каждого* $\gamma \ge \beta$, $(u, u') \in \mathcal{D}^{2\alpha}_{S,\tilde{X}}([0,T], U_\beta)$ *и* $(Z_t, Z'_t) := (F(u_t), DF(u_t)u'_t)$. *Также предположим, что* $u \in L^\infty([0,T], U_{2\alpha+\beta})$ *и* $u' \in L^\infty([0,T], U^2_{2\alpha+\beta})$. *Тогда* $(Z, Z') \in \mathcal{D}^{2\alpha}_{S,\tilde{X}}([0,T], U_\beta^n)$ *и существует константа* $C_F = C_F(T)$ *такая, что выполняется оценка*

$$\|(Z, Z')\|_{\tilde{X}, 2\alpha, \beta} \le C_F (1 + \|\tilde{X}\|_\alpha)^2 (1 + \|u\|_{\infty, 2\alpha+\beta} + \|u'\|_{\infty, 2\alpha+\beta} + \|(u, u')\|_{\tilde{X}, 2\alpha})^2,$$

при этом константа C_F *зависит от оценок на* F *и её производных.*

Введём пространство

$$\mathcal{D}^{2\alpha}_{\tilde{X}}([0,T], U_\beta) := \mathcal{D}^{2\alpha}_{S,\tilde{X}}([0,T], U_\beta) \cap (\hat{C}^\alpha([0,T], U_{2\alpha+\beta}) \times L^\infty([0,T], U_{2\alpha+\beta})).$$

Определение 6. Пусть $\alpha \in (\frac{1}{3}; \frac{1}{2}]$ и $T > 0$, тогда отображение $u \in C^\alpha([0,T], U)$ будем называть слабым решением задачи Коши (2) на промежутке $[0,T]$, если выполняются следующие условия:

1) $(u, u') \in \mathcal{D}^{2\alpha}_{\tilde{X}}([0,T], U)$, где $u' = F(u)$;

2) $(F(u), (F(u))') \in \mathcal{D}^{2\alpha}_{\tilde{X}}([0,T], \mathcal{L}_2(H \times [0,T], U_\gamma^2))$, $\forall \gamma \ge -2\alpha$, где $(F(u))' = DF(u)F(u)$;

3) $\forall t \in [0,T]$ выполняется равенство

$$u_t = S_t \xi + \int\limits_0^t S_{t-r} F(u_r) d\tilde{\mathbf{X}}_r,$$

где интеграл в правой части понимается в смысле (3), при $Y_t = F(u_t)$.

Теорема. *Пусть* $\xi \in U$, $\alpha \in (\frac{1}{3}; \frac{1}{2}]$, $\tilde{\boldsymbol{X}} \in \mathcal{C}^\alpha([0,T], H \times [0,T])$ *и* $F \in C_b^3(U_\gamma, \mathcal{L}_2(H \times [0,T], U_\gamma^2))$ *для каждого* $\gamma \ge -2\alpha$. *Тогда существует единственное слабое решение уравнения* (2) *на промежутке* $[0,T]$.

Доказательство теоремы главным образом основано на леммах 1 и 2, а также — на теореме Банаха о неподвижной точке.

Литература

1. Gerasimovics A., Hairer M. *Hormander's theorem for semilinear SPDEs* // Electron. J. Probab. 2019.

2. Friz P.K., Hairer M. *A Course on Rough Paths.* Universitext. Springer, Cham, 2020. With an introduction to regularity structures; Second edition. P. 219–223.

О РЕШЕНИИ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

А.П. Шилин

Проведено дальнейшее исследование уравнения

$$\sum_{k=0}^{n}\Big[\left(a(t)A_k(t)+b(t)B_k(t)\right)\varphi^{(k)}(t)+$$

$$+\frac{k!}{\pi i}\left(a(t)A_k(t)-b(t)B_k(t)\right)\int\limits_L\frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-t)^{k+1}}\Big]=f(t),\ \ t\in L\,,$$

с интегралами, понимаемыми в смысле конечной части по Адамару. В этом уравнении L — простая гладкая замкнутая положительно ориентированная кривая на комплексной плоскости, $a(t)\neq 0$, $b(t)\neq 0$, $f(t)$ — заданные на этой кривой H-непрерывные (т.е. удовлетворяющие условию Гельдера) функции, $\varphi(t)$ — искомая на L функция, H-непрерывная вместе со своими производными до порядка n включительно.

Актуальным вопросом представляется нахождение функций $A_k(t)$, $B_k(t)$, $k=\overline{0,\,n}$, для которых возможно точное аналитическое решение уравнения. Два таких случая были указаны автором на предыдущих «Еругинских чтениях», соответствующие подробные результаты опубликованы затем в [1, 2]. Укажем два новых случая при $n\geq 3$:

1. $A_k(t)=(\alpha_k-(\lambda_1+\lambda_2)\alpha_{k+1}+\lambda_1\lambda_2\alpha_{k+2})t+(k+1)(\alpha_{k+1}-(\lambda_1+\lambda_2)\alpha_{k+2}+\lambda_1\lambda_2\alpha_{k+3})$,

   $B_k(t)=(\beta_k-(\mu_1+\mu_2)\beta_{k+1}+\mu_1\mu_2\beta_{k+2})t+(k+1)(\beta_{k+1}-(\mu_1+\mu_2)\beta_{k+2}+\mu_1\mu_2\beta_{k+3})\,.$

2. $A_k(t)=(\alpha_k-(\lambda_1+\lambda_2)\alpha_{k+1}+\lambda_1\lambda_2\alpha_{k+2})\,t^2+((\lambda_1+\lambda_2)\alpha_{k+2}-2\alpha_{k+1})\,t+2\alpha_{k+2}\,,$

   $B_k(t)=(\beta_k-(\mu_1+\mu_1)\beta_{k+1}+\mu_1\mu_2\beta_{k+2})\,t^2+((\mu_1+\mu_2)\beta_{k+2}-2\beta_{k+1})\,t+2\beta_{k+2}.$

Здесь $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \mu_1,\ \mu_2,\ \alpha_k,\ \beta_k,\ k=\overline{0,\,n+3},$ — заданные комплексные числа, причем $\alpha_k=\beta_k=0$ при $k=0,\ 1,\ n+1,\ n+2,\ n+3,$ $\alpha_n=\beta_n=1$, $\lambda_1\neq\lambda_2$, $\mu_1\neq\mu_2$. Корни многочленов $P(\lambda)=\sum_{k=0}^{n-2}\alpha_{k+2}\lambda^k$, $Q(\mu)=\sum_{k=0}^{n-2}\beta_{k+2}\mu^k$ предполагаются однократными, $P(\lambda_k)\neq 0$, $Q(\mu_k)\neq 0$, $k=1,2$.

В этих случаях выписаны явно условия разрешимости уравнения, а при их выполнении приведены формулы решения. Используются обобщенные формулы Сохоцкого, теория краевой задачи Римана, метод вариации произвольных постоянных для линейных дифференциальных уравнений с учетом дополнительных условий на решение.

Литература

1. Шилин А. П. *Гиперсингулярное интегро-дифференциальное уравнение с рекуррентными соотношениями в коэффициентах* // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. 2022. № 3. С. 6–15.

2. Шилин А. П. *Гиперсингулярное интегро-дифференциальное уравнение с линейными функциями в коэффициентах* // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2022. Т. 58. № 4. С. 358–369.