

$$\tau_2(t) = \exp\left(-\frac{t}{12\sqrt{b}\sqrt{c_1c_2}}\right), \quad a = 2\sqrt{c_1c_2}; \quad c_1, c_2 = \text{const},$$

являются одним из решений уравнения (3).

Окончательно соответствующее решение уравнения ВВМ (1) будет иметь вид

$$u(x, t) = \left\{ c_1 \exp\left(\frac{x}{\sqrt{b}} + \frac{t}{12\sqrt{b}\sqrt{c_1c_2}}\right) + c_2 \exp\left(-\frac{x}{\sqrt{b}} - \frac{t}{12\sqrt{b}\sqrt{c_1c_2}}\right) + 2\sqrt{c_1c_2} \right\}^{-1}. \quad (4)$$

Решение (4) впервые получено нами. Более того, ОМФ позволил нам построить как все уже известные аналитические решения уравнения (1), так и ряд принципиально новых.

Полученные результаты могут найти применение при исследовании нелинейных физических процессов.

Литература

1. Полянин А. Д., Зайцев В. Ф. *Справочник по нелинейным уравнениям математической физики*. М.: Издательская фирма "Физико-математическая литература" 2002.
2. Андрушкевич И. Е. *Методы разделения переменных в волновых уравнениях*. Новополюцк: ПГУ, 2010.
3. Андрушкевич И. Е. *Метод построения аналитических решений нелинейных уравнений с частными производными и алгоритм решения уравнений третьего порядка специального вида* // Информатика. 2017. № 4. С. 5 – 19.

О ДИСКРЕТНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ В КВАДРАНТЕ

Е.Б. Афанасьева, В.Б. Васильев, О.Ю. Лукинова, А.А. Машинец

Для исследования разрешимости модельных эллиптических псевдодифференциальных уравнений была использована специальная факторизация эллиптического символа [1], при наличии которой удалось получить полную картину разрешимости. Исследование дискретных ситуаций было начато в работе [2] и продолжено в [3,4], где рассматривался случай полупространства. Здесь рассматривается дискретное уравнение в квадранте – простейшей канонической области с негладкой границей.

Пусть $\mathbb{Z}^2$ обозначает целочисленную решетку на плоскости. Обозначим $K = \{x \in \mathbb{R}^2 : x = (x_1, x_2), x_1 > 0, x_2 > 0\}$ первый квадрант, $K_d = h\mathbb{Z}^2 \cap K, h > 0$. Мы будем работать с функциями дискретной переменной $u_d(\tilde{x}), \tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \in h\mathbb{Z}^2$.

Обозначим $\mathbb{T}^2 = [-\pi, \pi]^2, \hbar = h^{-1}, \zeta^2 = h^{-2}((e^{-i\hbar\xi_1} - 1)^2 + (e^{-i\hbar\xi_2} - 1)^2), S(h\mathbb{Z}^2)$ – дискретный аналог пространства Шварца бесконечно дифференцируемых быстро убывающих на бесконечности функций..

Пространство $H^s(h\mathbb{Z}^2)$ состоит из дискретных обобщенных функций и является замыканием пространства $S(h\mathbb{Z}^2)$ в норме

$$\|u_d\|_s = \left(\int_{\mathbb{T}^2} (1 + |\zeta^2|)^s |\tilde{u}_d(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2},$$

где $\tilde{u}_d(\xi)$ обозначает дискретное преобразование Фурье

$$\tilde{u}_d(\xi) = \sum_{\tilde{x} \in h\mathbb{Z}^2} e^{-i\tilde{x} \cdot \xi} u_d(\tilde{x}) h^2, \quad \xi \in h\mathbb{T}^2.$$

Пространство $H^s(K_d)$ состоит из дискретных обобщенных функций из пространства $H^s(h\mathbb{Z}^2)$, носители которых содержатся в $\bar{K}_d$. Норма в пространстве $H^s(K_d)$ индуцируется нормой пространства $H^s(h\mathbb{Z}^2)$.

Пусть $A_d(\xi)$ – измеримая периодическая функция, определенная на $\mathbb{R}^2$ с основным квадратом периодов $h\mathbb{T}^2$. Под дискретным псевдодифференциальным оператором A_d с символом $A_d(\xi)$ в дискретном квадранте K_d мы понимаем оператор следующего вида

$$(A_d u_d)(\tilde{x}) = \sum_{\tilde{y} \in h\mathbb{Z}^2} h^2 \int_{h\mathbb{T}^2} A_d(\xi) e^{i(\tilde{x}-\tilde{y}) \cdot \xi} \tilde{u}_d(\xi) d\xi, \quad \tilde{x} \in K_d.$$

Говорят, что оператор A_d – эллиптический, если

$$\text{ess} \inf_{\xi \in h\mathbb{T}^2} |A_d(\xi)| > 0.$$

Здесь мы рассматриваем символы, удовлетворяющие условию

$$c_1(1 + |\zeta^2|)^{\alpha/2} \leq |A_d(\xi)| \leq c_2(1 + |\zeta^2|)^{\alpha/2}$$

с положительными постоянными c_1, c_2 , не зависящими от h , и число $\alpha \in \mathbb{R}$ мы называем порядком дискретного псевдодифференциального оператора A_d .

Нас интересует разрешимость дискретного уравнения

$$(A_d u_d)(\tilde{x}) = 0, \quad \tilde{x} \in K_d, \quad (1)$$

в пространстве $H^s(K_d)$.

Для символа $A_d(\xi)$ вводится понятие периодической волновой факторизации с индексом $\mathfrak{x}$, при наличии которой удается выписать общее решение уравнения (1).

Мы здесь предполагаем, что $\mathfrak{x} - s = 1 + \delta, |\delta| < 1/2$. К уравнению добавляются дискретное условие на сторонах угла

$$u_d|_{\tilde{x}_1=0} = f_d(\tilde{x}_2), \quad u_d|_{\tilde{x}_2=0} = g_d(\tilde{x}_1). \quad (2)$$

Таким образом, задача (1),(2) – это дискретная задача Дирихле.

Теперь обозначим

$$\int_{-h\pi}^{h\pi} A_{d,\neq}^{-1}(\xi) d\xi_1 \equiv \tilde{a}_0(\xi_2), \quad \int_{-h\pi}^{h\pi} A_{d,\neq}^{-1}(\xi) d\xi_2 \equiv \tilde{b}_0(\xi_1),$$

и в предположении, что выполнено условие $\tilde{a}_0(\xi_2), \tilde{b}_0(\xi_1) \neq 0, \forall \xi_1 \neq 0, \xi_2 \neq 0$,

$$\tilde{F}_d(\xi_2) = \tilde{f}_d(\xi_2) \tilde{a}_0^{-1}(\xi_2), \quad \tilde{G}_d(\xi_1) = \tilde{g}_d(\xi_1) \tilde{b}_0^{-1}(\xi_1),$$

$$k_1(\xi) = A_{d,\neq}^{-1}(\xi) \tilde{b}_0^{-1}(\xi_1), \quad k_2(\xi) = A_{d,\neq}^{-1}(\xi) \tilde{a}_0^{-1}(\xi_2).$$

В новых обозначениях введем систему двух линейных интегральных уравнений относительно двух неизвестных функций $\tilde{c}_0(\xi_1), \tilde{d}_0(\xi_2)$

$$\begin{cases} \int_{-h\pi}^{h\pi} k_1(\xi) \tilde{c}_0(\xi_1) d\xi_1 + \tilde{d}_0(\xi_2) = \tilde{F}_d(\xi_2) \\ \tilde{c}_0(\xi_1) + \int_{-h\pi}^{h\pi} k_2(\xi) \tilde{d}_0(\xi_2) d\xi_2 = \tilde{G}_d(\xi_1), \end{cases} \quad (3)$$

Доказана эквивалентность задачи (1), (2) системе (3) и однозначная разрешимость системы (3) для достаточно малых h при условии однозначной разрешимости соответствующей системы в непрерывном случае. Дано сравнение дискретных и непрерывных решений.

Литература

1. Васильев В. Б. *Мультипликаторы интегралов Фурье, псевдодифференциальные уравнения, волновая факторизация, краевые задачи*. М.: КомКнига, 2010.
2. Vasilyev A. V., Vasilyev V. B. *Pseudo-differential operators and equations in a discrete half-space* // Math. Model. Anal. 2018. V. 23. № 3. P. 492–506.
3. Васильев В. Б. *Операторы и уравнения: дискретное и непрерывное* // Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз. 2019. Т. 160. С. 18–27.
4. Васильев В. Б., Тарасова О. А. *О дискретных краевых задачах и их аппроксимационных свойствах* // Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз. 2020. Т. 174. С. 12–19.

НЕРЕГУЛЯРИЗУЕМОСТЬ КАНОНИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ РИМАНА-ГИЛЬБЕРТА ДЛЯ ОДНОЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ В $\mathbb{R}^3$

А.И. Басик, Е.В. Грицук

Пусть в ограниченной односвязной области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$ задана эллиптическая система четырех дифференциальных уравнений вида

$$\sum_{j=1}^3 A_j \frac{\partial U}{\partial x_j} = 0. \quad (1)$$

Здесь A_j ($j = 1, 2, 3$) – постоянные квадратные действительные матрицы четвертого порядка, $U : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^4$ – искомая вектор-функция. Под задачей Римана-Гильберта для системы (1) понимают задачу отыскания ее решения класса $C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, удовлетворяющего граничному условию

$$\mathfrak{B}(\eta)\mathfrak{U} = f(\eta) \quad (\eta \in \partial), \quad (2)$$

где $\mathfrak{B}$, f – заданные непрерывные по Гельдеру на поверхности $\partial\Omega$ матрица-функция размера 2×4 и двухкомпонентная вектор-функция соответственно.

В случае, когда (1) является системой Моисила-Теодореску и матрица граничного условия (2) имеет канонический вид

$$\mathfrak{B}(\eta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \nu_1(y) & \nu_2(y) & \nu_3(y) \end{pmatrix}, \quad (3)$$