12. Cercigniani C., Kremer G. M. *The relativistic Boltzmann Equation: theory and applications.* Boston, Basel, Berlin: Birghause, 2002.

13. Choquet–Bruhat Y. *Introduction to general relativity, black holes and cosmology.* New York: Oxford University Press. 2015.

14. Rein G., Rendall A. D. *Global existence of solutions of the spherically symmetric Vlasov-Einstein system with small initial data.* // Commun. Math. Phys. 1992. 150. P. 561-583.

15. Kandrup H. E., Morrison P. J. *Hamiltonian structure of the Vlasov–Einstein system and the problem of stability for spherical rela-tivistic star clusters* // Ann. Phys. 1993. V. 225. P. 114–166.

16. Madelung E. *Quantentheorie in hydrodynamischer form (Quantum theory in hydrodynamic form).* // Z Phys. 1926. 40. P. 322–326.

17. Аржаных И. С. *Поле импульсов.* Наука, Ташкент, 1965.

18. Долматов К. И. *Поле импульсов аналитической динамики.* Дисс. ... канд. физ.-матем. наук, Ташкент. 1950.

19. Козлов В. В. *Гидродинамика гамильтоновых систем* // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1 Матем. Мех. 1983. №6. 10–22.

20. Козлов В. В. *Общая теория вихрей.* Изд-во Удмуртского ун-та, Ижевск, 1998.

21. Козлов В. В. *Симметрии, топология и резонансы в гамильтоновой механике.* Изд-во Удмуртского гос. ун-та, Ижевск, 1995.

22. Gurzadyan V. G. *On the common nature of Dark Energy and Dark Matter* // Eur. Phys. J. Plus. 2019. 134. P. 14.

23.Vedenyapin V. V., Fimin N. N., Chechetkin V. M. *The generalized Friedman model as a self–similar solution of Vlasov–Poisson equations system* // European Physical Journal Plus. 2021. 136. № 670.

24. Веденяпин В. В., Воронина М. Ю., Руссков А. А. *О выводе уравнений электродинамики и гравитации из принципа наименьшего действия.* // Докл. АН. 2020. Т. 495. С. 9–13.

СПЕКТРАЛЬНЫЙ МЕТОД ЧЕБЫШЕВА ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ С РАЗРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В.М. Волков, Е.И. Качаловская

Преимущества спектральных методов в наибольшей мере проявляются при решении задач, входные данные которых обладают достаточной гладкостью. В докладе исследованы возможности эффективного использования указанного класса методов для дифференциальных уравнений с разрывными коэффициентами.

Рассмотрена модельная краевая задача, на примере которой проиллюстрированы возможные приемы сглаживания входных данных для обеспечения эффективности спектрального метода в случае разрывных коэффициентов:

$$\frac{d}{dx}\sigma(x)\frac{du}{dx} = f(x,y), \quad (x,y) \in [-1,1]\times[-1,1], \tag{1}$$

$$u(\pm 1) = 0. \tag{2}$$

Для решения задачи (1)–(2) использован спектральный метод коллокации Чебышева [1, 2] и результаты сопоставлялись с результатами, полученными методом конечных разностей.

Рассмотрены два случая, в первом из которых исследована возможность использования супергауссовой функции для приближения коэффициента $\sigma(x)$ прямоугольной формы:

$$\sigma(x) = \sigma_0 + \sigma_1 exp\left(-(2x)^{2n}\right), \quad n \to \infty. \tag{3}$$

При этом решение задачи (1)–(2) полагалось гладким, $u(x) = \cos\left(2\pi\left(x^2 - 0.25\right)/3\right)$, а правая часть приобретала разрыв в точке разрыва коэффициента при $n \to \infty$. Второй случай — задача с постоянным коэффициентом $\sigma(x) = const$ и правой частью в виде дельта–функции $f(x) = -2\delta(x)$, решение которой имеет разрыв первой производной при $x = 0$: $u(x) = 1 - |x|$, $u'(x) = -sign(x)$.

При сглаживании коэффициентов относительная точность 10^{-10} достигалась, когда на разрыв приходилось не менее девяти точек сетки. Например, при $n = 40$ для достижения такой точности общее число узлов чебышёвской сетки превышает $N = 900$. При $n = 80$ и $N = 1000$ (четыре точки на разрыв коэффициентов) относительная погрешность спектрального метода сопоставима с погрешностью метода конечных разностей и превышает 10^{-6}.

Для аппроксимации дельта–функции первоначально использовалось выражение

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}} \exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{4\tau}\right), \quad \lim_{\tau\to 0} g(x) = \delta(x - x_0), \tag{4}$$

однако, такое сглаживание оказалось совершенно непригодным для моделирования точечного источника, поскольку точность спектрального метода оказывалась при этом существенно хуже, чем точность метода конечных разностей. В качестве аппроксимации дельта–функции лучше всего подходит вторая спектральная производная от фундаментального решения задачи. В этом случае, очевидно, погрешность будет сравнима с вычислительной погрешностью. Данный подход может быть использован при моделировании точечных источников в рамках многомерного уравнения Пуассона и более сложных задач с неоднородными и разрывными коэффициентами.

Литература

1.Trefethen L.N. *Spectral Methods in MATLAB.* Philadelphia: SIAM, 2000.

2. Boyd J. P. *Chebyshev and Fourier spectral methods.* Courier Corporation, 2001.

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ, ПОДДЕРЖИВАЮЩЕЕ ПЛОДОРОДИЕ ПОЧВЫ

Л.А. Володченкова, А.К. Гуц

В работе [1] было предложено дифференциальное уравнение, описывающее уровень плодородия почвы x с учетом только двух наиболее важных факторов: типа почвообразующей породы (материнской породы) p, которая служит основой (каркасом) для формирования почвы, и влаги W, которая является жизненной основой растений, почвенной фауны и микрофлоры:

$$\dot{x} = \gamma \cdot (p - x^2)x - \delta \cdot (W - W_-)(W - W_+), \quad t \geq 0, \tag{1}$$

где $\gamma, \delta > 0$ – константы, W_- – значение влажности почвы, которое характеризует нехватку воды, и, соответственно, W_+ – ее избыток $(0 < W_- < W_+)$. При изменениях влажности, выходящей за пределы отрезка $[W_-, W_+]$, наблюдаются катастрофы типа «сборка», т.е. скачкообразные изменения плодородия x. Хотя уровень плодородия зависит и от ряда других факторов: химических, физико-химических, биологических, мы сконцентрировали внимание на чисто физических факторах, формирующих почву и обеспечивающих ее плодородие.