

случай — задача с постоянным коэффициентом $\sigma(x) = \text{const}$ и правой частью в виде дельта-функции $f(x) = -2\delta(x)$, решение которой имеет разрыв первой производной при $x = 0$: $u(x) = 1 - |x|$, $u'(x) = -\text{sign}(x)$.

При сглаживании коэффициентов относительная точность 10^{-10} достигалась, когда на разрыв приходилось не менее девяти точек сетки. Например, при $n = 40$ для достижения такой точности общее число узлов чебышёвской сетки превышает $N = 900$. При $n = 80$ и $N = 1000$ (четыре точки на разрыв коэффициентов) относительная погрешность спектрального метода сопоставима с погрешностью метода конечных разностей и превышает 10^{-6} .

Для аппроксимации дельта-функции первоначально использовалось выражение

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}} \exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{4\tau}\right), \quad \lim_{\tau \rightarrow 0} g(x) = \delta(x-x_0), \quad (4)$$

однако, такое сглаживание оказалось совершенно непригодным для моделирования точечного источника, поскольку точность спектрального метода оказывалась при этом существенно хуже, чем точность метода конечных разностей. В качестве аппроксимации дельта-функции лучше всего подходит вторая спектральная производная от фундаментального решения задачи. В этом случае, очевидно, погрешность будет сравнима с вычислительной погрешностью. Данный подход может быть использован при моделировании точечных источников в рамках многомерного уравнения Пуассона и более сложных задач с неоднородными и разрывными коэффициентами.

Литература

1. Trefethen L.N. *Spectral Methods in MATLAB*. Philadelphia: SIAM, 2000.
2. Boyd J. P. *Chebyshev and Fourier spectral methods*. Courier Corporation, 2001.

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ, ПОДДЕРЖИВАЮЩЕЕ ПЛОДОРОДИЕ ПОЧВЫ

Л.А. Володченкова, А.К. Гуц

В работе [1] было предложено дифференциальное уравнение, описывающее уровень плодородия почвы x с учетом только двух наиболее важных факторов: типа почвообразующей породы (материнской породы) p , которая служит основой (каркасом) для формирования почвы, и влаги W , которая является жизненной основой растений, почвенной фауны и микрофлоры:

$$\dot{x} = \gamma \cdot (p - x^2)x - \delta \cdot (W - W_-)(W - W_+), \quad t \geq 0, \quad (1)$$

где $\gamma, \delta > 0$ — константы, W_- — значение влажности почвы, которое характеризует нехватку воды, и, соответственно, W_+ — ее избыток ($0 < W_- < W_+$). При изменениях влажности, выходящей за пределы отрезка $[W_-, W_+]$, наблюдаются катастрофы типа «сборка», т.е. скачкообразные изменения плодородия x . Хотя уровень плодородия зависит и от ряда других факторов: химических, физико-химических, биологических, мы сконцентрировали внимание на чисто физических факторах, формирующих почву и обеспечивающих ее плодородие.

При изменении факторов p и W , не пересекающих бифуркационное множество, состояние плодородия x может пребывать в устойчивом стационарном равновесии $dx/dt = 0$. Однако, факторы p, W при этом не меняются. Поэтому интересно найти равновесие, когда могут меняться все переменные x, p, W . Для этого используем теорию дифференциальных игр [2], позволяющую найти оптимальное *позиционное управление* $p^*(x), W^*(x)$, обеспечивающие равновесие Нэша для «игроков» p и W и называемое также стратегией Маркова.

Рассмотрим дифференциальную игру «игроков» p и W с ненулевой суммой

$$\dot{x} = f(x) + g_1(x)p + g_2(x)w, \tag{2}$$

$$f(x) = -x^3, \quad g_1(x) = x, \quad g_2(x) = -\delta, \quad w = (W - W_-)(W - W_+),$$

$$V_1^*(x(t), p^*, w^*) = \min_{p,w} \int_t^{+\infty} [Q_1(x) + p^2] dt, \quad V_2^*(x(t), p^*, w^*) = \min_{p,w} \int_t^{+\infty} [Q_2(x) + w^2] dt,$$

$$Q_1(x) = Q_2(x) = [2\gamma + \gamma^2]x^4 + \delta^2 x^2 \geq 0.$$

Искомое оптимальное управление имеет вид

$$p^*(x) = -\frac{1}{2}g_1(x)(V_1^*)'(x), \quad w^*(x) = -\frac{1}{2}g_2(x)(V_2^*)'(x), \tag{3}$$

где $V_1^*(x) = V_2^*(x) = x^2$ являются решениями уравнения Гамильтона-Якоби

$$Q_1 + (V_1)'_x f(x) - \frac{1}{4}[g_1(x)]^2 [(V_1)'_x]^2 - \frac{1}{2}[g_2(x)]^2 (V_1)'_x (V_2)'_x + \frac{1}{4}[g_2(x)]^2 [(V_1)'_x]^2 = 0,$$

$$Q_2 + (V_2)'_x f(x) - \frac{1}{4}[g_2(x)]^2 [(V_2)'_x]^2 - \frac{1}{2}[g_1(x)]^2 (V_1)'_x (V_2)'_x + \frac{1}{4}[g_1(x)]^2 [(V_1)'_x]^2 = 0.$$

Поскольку $p^*(x) = -x$ и тип почвообразующей породы практически не изменяется, то можно принять, что $\dot{x} \approx 0$, т.е. имеем стационарное равновесие. Иначе говоря, равновесие Нэша совпадет со стационарным. Наконец, система (2), (3) асимптотически устойчивая.

Работа выполнена в рамках государственного задания «Эволюция окружающей среды и климата вследствие естественных причин и антропогенного воздействия» (FGRW-2021-0015, № государственной регистрации 122032300363-3).

Литература

1. Володченкова Л. А. *Модель плодородия почвы с точки зрения катастрофы «сборка»* // Математическое и компьютерное моделирование: сборник материалов Международной научной конференции (Омск, 21 ноября 2014 г.). Омск: изд-во Ом. гос. ун-та, 2014. С. 25–26.
2. Lewis F., Vrabie D., Syrmos V. *Optimal Control*. New Jersey: John Wiley & Sons, Inc., 2012.