НЕЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМНЫЕ ЭВОЛЮЦИОННЫЕ ОПЕРАТОРЫ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ К МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ИСКУССТВЕННОГО ИНТЕЛЛЕКТА

Ю.М Вувуникян, И.В. Трифонова, Ваньли Чэнь

В работе рассматривается нейронная сеть, математическая модель нейронов которой учитывает движение электрических токов в нейроне. Такая модель, в отличие от моделей с формальными нейронами, называется импульсной (или спайковой) моделью и является моделью 3-его поколения. Наиболее эффективной импульсной моделью в настоящее время признается математическая модель импульсной нейронной сети ФитцХью-Нагумо, которая детально моделирует динамику активации и деактивации нейронов на основе нелинейных дифференциальных уравнений Ван-дер-Поля [1]. Эта модель была предложена в 1961 году ФитцХью [2], а более общая модель разработана в 1962 году в работе [3] Нагумо и др.

Математическую модель нейрона ФитцХью-Нагумо в общем виде можно записать в виде следующей системы двух дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} x' + y = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + x^3 \\ y' + \alpha y = \beta x \end{cases}, \tag{1}$$

где x – мембранный потенциал, y – ток восстановления. Введя обобщенные импульсные характеристики [5], систему (1) можно записать следующим образом:

$$\begin{cases} (\delta' - \alpha_1\delta) * x + \delta * y - \alpha_2 S_2(\delta^{\otimes 2} * x^{\otimes 2}) - S_3(\delta^{\otimes 3} * x^{\otimes 3}) = \alpha_0 \\ (\delta' + \alpha\delta) * y - \beta\delta * x = 0 \end{cases}, \tag{2}$$

где δ' – обобщенная производная дельта-функции δ, $\delta^{\otimes 2}$ и $\delta^{\otimes 3}$ – тензорный квадрат и тензорный куб дельта-функции δ соответственно, т.е. $\delta^{\otimes 2} = \delta \otimes \delta$ и $\delta^{\otimes 3} = \delta \otimes \delta \otimes \delta$, S_2 и S_3 – операторы сокращения переменных второго и третьего порядков.

Левая часть системы (2) представляет полиномиальный эволюционный оператор [5] второй кратности третьей степени. Таким образом, математической модели нейрона ФитцХью-Нагумо соответствует полиномиальный эволюционный оператор. Отметим, что при этом параллельному соединению соответствует сложение эволюционных операторов, а последовательному соединению соответствует композиция соответствующих эволюционных операторов.

Часто полезно сводить математическую модель системы не к достаточно сложному кратному эволюционному оператору, а к более простому полиномиальному эволюционному оператору первой кратности. Эта задача несложно решается для математической модели нейрона ФитцХью-Нагумо.

Действительно, решая относительно функции y второе дифференциальное уравнение рассматриваемой системы (1), имеем

$$y(t) = \beta(K * x)(t) + y_0 = \beta \int_0^t K(t-s)x(s)ds + y_0,$$

где $*$ – операция свертки, $K(t) = e^{-\alpha t}, y_0 = y(0)$.

Подставляя полученное равенство в первое уравнение рассматриваемой системы, получаем следующее уравнение:

$$x'(t) + \beta \int_0^t K(t-s)x(s)ds = \alpha_0 + \alpha_1 x(t) + \alpha_2 x^2(t) + x^3(t) - y_0. \qquad (3)$$

Перенося y_0 в правую часть и обозначая $f(t,x) = \alpha_0 + \alpha_1 x(t) + \alpha_2 x^2(t) + x^3(t) - y_0$, получаем эволюционное нелинейное интегральное уравнение Вольтерра:

$$\beta \int_0^t K(t-s)x(s)ds + x'(t) = f(t,x).$$

Уравнение (3) запишем в следующем виде:

$$x' + \beta K * x - \alpha_1 x - \alpha_2 x^2 - x^3 = \alpha_0 - y_0$$

и, применяя введенные обозначения, получим уравнение

$$(\delta' + \beta K - \alpha_1 \delta) * x + S_2(-\alpha_2 \delta^{\otimes 2} * x^{\otimes 2}) + S_3(-\delta^{\otimes 3} * x^{\otimes 3}) = \alpha_0 - y_0. \qquad (4)$$

Введем обобщенные импульсные характеристики:

$$a_1 = \delta' + \beta K - \alpha_1 \delta,\ a_2 = -\alpha_2 \delta^{\otimes 2},\ a_3 = \delta^{\otimes 3}.$$

Тогда левая часть уравнения (4) может быть записана следующим образом:

$$a_1 * x + S_2(a_2 * x^{\otimes 2}) + S_3(a_3 * x^{\otimes 3}),$$

что соответствует канонической записи полиномиального эволюционного оператора третьей степени с обобщенными импульсными характеристиками.

Для обучения импульсной нейронной сети FitzHugh–Nagumo мы использовали платформу SNNtorch и метод пакетной нормализации, зависящий от порога (tdBN), основанный на пространственно-временном обратном распространении STBP, называемый «STBP-tdBN». В качестве простого примера применения модели рассмотрена задача классификации набора данных MNIST.

Литература

1. Van der Pol B. *On relaxation-oscillations* // Philosophical Magazine & Journal of Science. 1926. Vol. 2. № 11. P. 978.

2. FitzHugh R. *Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane* // Biophysical Journal. 1961. Vol. 1. Issue 6. P. 445–466.

3. Nagumo J., Arimoto S., Yoshizawa S. *An active pulse transmission line simulating nerve axon* // Proceedings of the IRE. 1962. Vol. 50. P. 2061–2070.

4. Wilson H. R., Cowan J. D. *Excitatory and inhibitory interactions in localized populations of model neurons* // Biophys. J. 1972. Vol. 12. P. 1.

5. Вувуникян Ю. М. *Эволюционные операторы с обобщёнными импульсными и спектральными характеристиками: монография.* Гродно: ГрГУ, 2007.

6. Вувуникян Ю. М., Чэнь Ваньли *Последовательное соединение мультиполярных эволюционных операторов с обобщенными импульсными характеристиками* // XIII Белорусская математическая конференция: материалы Международной научной конференции. 2021. Ч. 1. С. 18–19.

7. Вувуникян Ю. М., Чэнь Ваньли *Операторное моделирование импульсной нейронной сети и прямое произведение реакций системных операторов* // Системы компьютерной математики и их приложения (СКМП-2022): сб. материалов XXIII Междунар. конф. 2022. Вып. 23. С. 202–210.

8. Вувуникян Ю. М., Чэнь Ваньли. *Методы прямого обучения глубоких импульсных нейронных сетей* // Материалы Международного конгресса по информатике: информационные системы и технологии. 2022. С. 112–116.

ДИФФУЗИЯ В СМЕСИ ИДЕАЛЬНЫХ ГАЗОВ С УЧЕТОМ ЗАВИСИМОСТИ КОЭФФИЦИЕНТА ДИФФУЗИИ ОТ ЭНТРОПИИ СМЕШЕНИЯ

Н. Н. Гринчик, Г. М. Заяц

Проблеме диффузионного смешения газов посвящено большое количество работ, в которых освещаются различные подходы к исследованию этой проблемы. В данной работе впервые предлагается метод моделирования диффузии в смеси идеальных газов с использованием химического потенциала и энтропии смешения.

Известно, что для идеального газа его химический потенциал имеет вид

$$\mu_i = RT\ln(x_i) + \mu_0(T),$$

где x_i – молярная концентрация i-го компонента смеси, R – газовая постоянная, T – температура, $\mu_0(T)$ – стандартное состояние.

Предполагаем, что поток массы i-го компонента определяется не только его градиентом, но и степенью неупорядоченности смеси, то есть энтропией смешения

$$q_i = -D_i \Delta S_{\text{cm}} x_i \nabla \mu_i, \tag{1}$$

где D_i – определяемый экспериментально коэффициент диффузии i-го компонента смеси; энтропия смешения ΔS_{cm} [1, стр.201]

$$\Delta S_{\text{cm}} = -R \left(\sum_{i=1}^{N} \frac{M_i}{v_i}\right) \left(\sum_{i=1}^{N} x_i \ln(x_i)\right);$$

$$\nabla \mu_i = R\ln(x_i)\nabla T + \frac{RT}{x_i}\nabla x_i, \tag{2}$$

M_i – масса, v_i – молярная масса i-го компонента смеси.

Полагаем, что смесь газов находится при невысоких давлениях и температурах, в связи с этим ее стандартное состояние не изменяется. Поэтому в дальнейшем градиент стандартного состояния $\nabla \mu_0(T)$ не учитывается. Кроме того, мы не будем учитывать градиенты давления, которые могут возникнуть при смешении легких и тяжелых компонентов смесей газов.

Подставив равенство (2) в соотношение (1), получим выражение для потока массы в единице объема i-го компонента смеси

$$q_i = -D_i \Delta S_{\text{cm}}\, x_i\, R \left(\text{n}(x_i)\nabla T + \frac{T}{x_i}\nabla x_i\right). \tag{3}$$

Введем эффективный коэффициент диффузии

$$D_{i,\text{eff}} = D_i \Delta S_{\text{cm}} R = D_i R^2 \left(\sum_{i=1}^{N} \frac{M_i}{v_i}\right) \left(\sum_{i=1}^{N} x_i \ln(x_i)\right).$$