

свойств. Во многих случаях не существует даже базы для построения таких методов. В тех же случаях, когда они построены, они обычно не являются эффективными средствами решения задачи в силу чрезмерной сложности соответствующих уравнений.

Предлагаемый подход является альтернативой не только использованию закона Фика, но и энтропийным методам моделирования в химической технике, базирующимся на законе сохранения информационной энтропии [2, 3].

Литература

1. Яворский Б. М., Детлаф А. А., Лебедев А. К. *Справочник по физике для инженеров и студентов вузов* / М. : ОНИКС, 2006.
2. Энтропийные методы моделирования в химической технике : межвуз. темат. сб. науч. тр. / Моск. ин-т хим. машиностроения. Москва : МИХМ, 1981 (вып. дан. 1982).
3. Майков В.П. *О выборе оптимального отбора продуктов при разделении бинарных смесей* // ДАН СССР. 1974. Т.215. №6. С.1421-1423.

СПЕКТРАЛЬНЫЙ МЕТОД ЧЕБЫШЁВА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ДВУМЕРНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ СО СМЕШАННЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

Дун Цзинхуэй

Рассмотрим задачу Дирихле для двумерного эллиптического уравнения в прямоугольной области:

$$\frac{\partial}{\partial x} \sigma_{xx} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \sigma_{yy} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \sigma_{yx} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \sigma_{xy} \frac{\partial u}{\partial y} = f(x, y) \quad (1)$$

$$(x, y) \in [-1, 1] \times [-1, 1], \quad u(\pm 1, y) = u(x, \pm 1) = 0, \quad (2)$$

где $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy} = \sigma_{yx}$ — компоненты тензора диффузии (проводимости).

На прямоугольной сетке внутренних узлов:

$$\omega_h = \left\{ (x_n, y_k), x_m = y_m = \cos \frac{\pi m}{N+1}, n = 1, N, k = 1, N \right\}, \quad (3)$$

спектральный метод Чебышёва для задачи (1) – (2) приводит к системе линейных алгебраических уравнений [1]:

$$Au = f, \quad (4)$$

матрица которой строится на основе матрицы спектрального дифференцирования Чебышёва $D \in R^{N \times N}$ с учетом граничных условий (2):

$$A = A_{xx} + A_{yy} + A_{xy} + A_{yx}$$

$$A_{xx} = (I \otimes D) \cdot [S_{xx} \cdot (I \otimes D)], \quad A_{yy} = (D \otimes I) \cdot [S_{yy} \cdot (D \otimes I)],$$

$$A_{yx} = (D \otimes I) \cdot [S_{yx} \cdot (I \otimes D)], \quad A_{xy} = (I \otimes D) \cdot [S_{xy} \cdot (D \otimes I)]. \quad (5)$$

Здесь S_{xx}, S_{xy} и т.д. — диагональные матрицы соответствующих коэффициентов задачи, \otimes — символ кронекеровского произведения матриц, $I \in R^{N \times N}$ — единичная матрица.

Для решения системы (4) использован стабилизированный метод би-сопряженных градиентов (BICGSTAB) [2] с переобусловливателем произведения в виде диагональной матрицы коэффициентов D_σ и разностного аналога оператора Лапласа $-\Lambda$, обрабатываемого с использованием метода переменных направлений [3, 4]. Матрица $A \in R^{N^2 \times N^2}$, согласно формуле (4), имеет полную структуру. Поэтому произведение данной матрицы на вектор приближенного решения задачи $u \in R^{N^2 \times 1}$ в итерационном алгоритме более эффективно реализовать следующим образом:

$$\begin{aligned} A_{xx} \cdot u : \bar{D} \cdot [\bar{\sigma}_{xx} \times (\bar{D} \cdot U)], \quad A_{xy} \cdot u : \bar{D} \cdot [\bar{\sigma}_{xy} \times (U \cdot \bar{D})], \\ A_{yy} \cdot u : [\bar{\sigma}_{yy} \times (U \cdot \bar{D})] \cdot \bar{D}, \quad A_{yx} \cdot u : [\bar{\sigma}_{yx} \times (\bar{D} \cdot U)] \cdot \bar{D}. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь $\bar{D} \in R^{(N+2) \times (N+2)}$ — матрица спектрального дифференцирования Чебышёва без учета краевых условий, $U \in R^{(N+2) \times (N+2)}$ и $\bar{\sigma}_{**} \in R^{(N+2) \times (N+2)}$ — двумерные массивы приближенного решения и соответствующих коэффициентов задачи на сетке, включающей граничные точки, символ " \times " использован для обозначения поэлементного умножения массивов (матриц).

Переобусловливатель D_σ применяется к системной матрице A до начала вычислений, а для обращения переобусловливателя Λ на каждой итерации воспользуемся итерационным методом переменных направлений (МПН). Таким образом, для реализации спектральной модели использованы два вложенных итерационных алгоритма. На внешнем цикле используется метод BICGSTAB, а на внутреннем — МПН. При этом, как было показано ранее [3, 5], достаточно не более 5-6 итераций МПН с оптимальным набором итерационных параметров для сходимости BICGSTAB с произвольной точностью.

Для исследования эффективности описанного выше метода была рассмотрена модельная задача вида (1)–(2) с коэффициентами

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \exp(-\alpha(x^2 + y^2)), \quad \sigma_{xy} = \sigma_{yx} = \sigma_{mix}(1 - x^2)(1 - y^2) \quad (7)$$

и правой частью $f(x, y)$ такой, чтобы точное решение задачи (1) – (2) определялось функцией $u(x, y) = (1 - x^2)(1 - y^2) \exp(x^2 + y^2)$.

Как показали результаты численных экспериментов, при достижении относительной нормы невязки в итерационном методе BICGSTAB значения 10^{-9} относительная погрешность приближенного решения не превосходила этого значения при количестве узлов сетки в пределах от $N = 19$ и выше. Графики зависимости количества итераций метода BICGSTAB и относительных вычислительных затрат от количества узлов прямоугольной сетки по каждому координатному направлению представлены на рис. 1. Из представленных результатов можно сделать вывод, что количество итераций не зависит от размерности сетки. Вычислительную сложность одной итерации можно оценить величиной $Q(N) = O(N^3)$, что соответствует умножению матриц в формулах (6). Тем не менее, как следует из рис. 1, относительное время решения задачи из расчета на один узел сетки остается практически неизменным в диапазоне $N = 125 \div 275$. Таким образом, фактическая вычислительная сложность алгоритма близка к оптимальной.

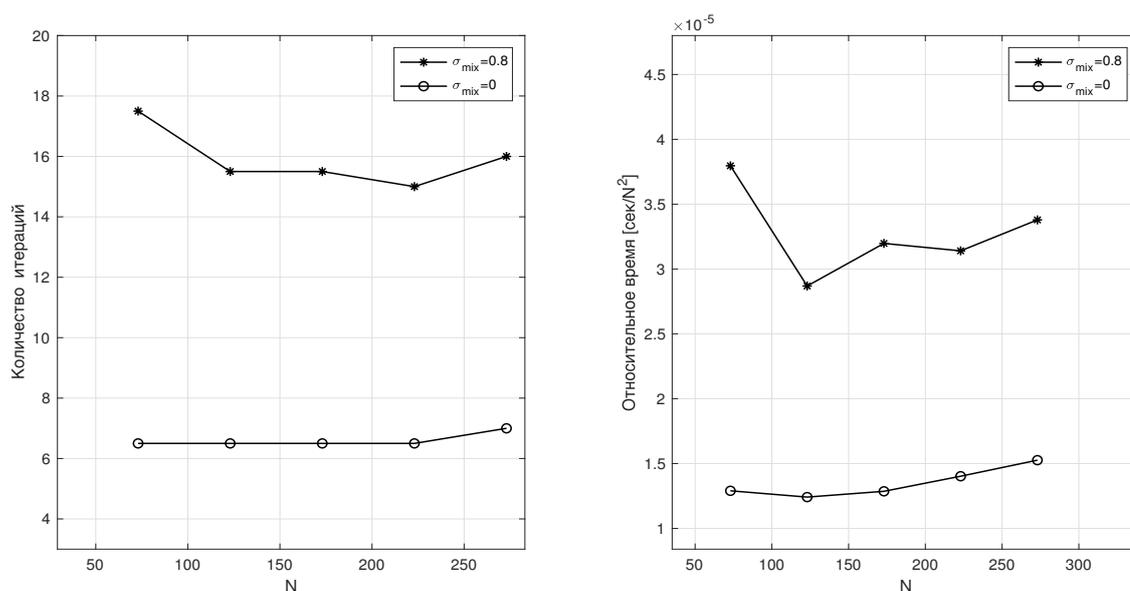


Рис. 1. Количество итераций и относительное время решения задачи при $\sigma_{mix} = 0$ (без смешанных производных) и $\sigma_{mix} = 0.8$.

Число итераций BICGSTAB и общие временные затраты при наличии смешанных производных возрастают и при $\sigma_{mix} = 0.8$ примерно в три раза превосходят данные показатели в случае $\sigma_{mix} = 0$ (см. рис.1.). Однако, качественные показатели эффективности алгоритма при наличии смешанных производных сохраняются и вычислительная сложность остается близкой к оптимальной.

Замечание. Известно, что умножение матриц спектрального дифференцирования Чебышёва на вектор можно оптимизировать с помощью алгоритма быстрого дискретного преобразования Фурье [1], понизив вычислительную сложность данной операции с $Q(N) = O(N^2)$ до $Q(N) = O(N \cdot \ln N)$. Однако, на практике данное преимущественно может быть реализовано лишь при больших $N \geq 1000$.

Литература

1. Trefet hen L.N. *Spectral Methods in MATLAB*. // Philadelphia: SLAM, 2000.
2. Van der Vorst, H.A. *BI-CGSTAB: A fast and smoothly converging variant of BI-CG for the solution of nonsymmetric linear systems* // SIAM J. Sei. Stat. Comput. 1992. Vol. 13. No. 2. P. 631-644.
3. Penzl T.A *cyclic low-rank Smith method for large sparse Lyapunov equations*[J]. //SIAM Journal on Scientific Computing. 1999. 21(4). P. 1401-1418.
4. Самарский А А, Николаев Е С. *Методы решения сеточных уравнений*[J].М., Наука. 1978.
5. В. М. Волков, Е. И. Мацулевич, Дун Цзинхуэй *Итерационная реализация спектрального метода Чебышёва для двумерных эллиптических задач* // XX Международная научная конференция по дифференциальным уравнениям (ЕРУГИНСКИЕ ЧТЕНИЯ - 2022)Ч. 2. - С. 76-78.